АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ II
ВЫПУСК
1

1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Doob J. L. Brownian motion on a Green space 3
Дуб Дж. Л. Броуновское движение в пространстве Грина 32
Линник Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона 34
Linnik Yu. V. On factorizing the composition of a Gaussian and a Poissonian law. 59
Цзян Цзэ-пей. О линейной экстраполяции непрерывного однородного случайного поля. 60
Chiang Tse-pei. Extrapolation theory of a homogeneous random field with continuous parameters. 91
Takacs L. On a stochastic process concerning some waiting time problems . . . 92
Такач Л. О стохастическом процессе, связанном с некоторыми задачами о времени ожидания. 105

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами 106
Sevastjanov B. A. An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals 116
Коронкевич А. И. Некоторые замечания об оценке точности линейного экстраполирования и фильтрации. 116
Koronkevič A. I. Some remarks on evaluating the accuracy of linear extrapolation and filtration. 121
Ибрагимов И. А. Замечание о вероятностных распределениях класса L . . . 121
Ibragimov I. A. Remark on a probability distribution of class L. 124
Большев Л. Н. Номограмма, связывающая параметры нормального распределения с вероятностями при классификации по трем группам 124
Bolshev L. N. A nomogram connecting the parameters of a normal distribution with the probabilities for classification into three groups. 126
Синай Я. Г. О распределении первой положительной суммы для последовательности независимых случайных величин. 126
Sinay Ya. G. On the distribution of the first positive sum for the sequence of independent random variables 135
Резюме докладов, сделанных на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории вероятностей. (сентябрь — декабрь 1956 г.). 135
A summary of papers presented at the sessions of the scientific research seminar on the theory of probabilities. 136

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ II

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА—1957

Состав редколлегии:

Бернштейн С. Н., *Гнеденко Б. В.*, *Золотарев В. М.* (ответственный секретарь), *Колмогоров А. Н.* (главный редактор), *Королюк В. С.* (зам. гл. редактора), *Линник Ю. В.*, *Сарымсаков Т. А.*, *Смирнов Н. В.*, *Хинчин А. Я.*

Адрес редакции: Москва В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-18-01

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1957

BROWNIAN MOTION ON A GREEN SPACE

By *J. L. DOOB*

1. Introduction. The purpose of this paper is to extend the basic results of Brownian motion theory, as already developed for spaces which are subsets of Euclidean N-space, to Green spaces. These spaces are the natural ones for Brownian motion. A significant advantage in going from Euclidean spaces to Green spaces is that, in much of the discussion, the character of the boundary does not enter, so that one can always deal with an abstract Green space instead of with its open subsets and their relative boundaries. For example, in discussing the Dirichlet problem, or Green's functions, on the space as a whole rather than on its subsets, the non-probabilistic treatment requires that the boundary points be defined individually even to formulate the problem to be attacked. We shall see that this is not necessary in the probabilistic approach.

The study actually goes beyond that of harmonic functions and Brownian motion stochastic processes on Green spaces. It turns out to be rewarding to treat parabolic functions and heat motion stochastic processes on heat spaces. A heat space is an open subset of the direct product of a Green space with the real line. Aside from the intrinsic interest of this study in connection with the heat equation, it very much simplifies the work in Green spaces.

Since many of the results are easily deduced from their analogues for subsets of Euclidean spaces, the treatment will sometimes be sketchy. New difficulties arise because the stochastic processes involved are defined in the small, and the definition must be extended into the large whereas in dealing with Euclidean spaces the processes are defined initially on the whole space, so that the definition of the processes on subspaces is trivial.

The natural stochastic processes in studies of this sort are processes with non-constant lifetime. An introduction to the study of such processes is sketched in the next section. Although they can be transformed into the usual ones, the transformation is somewhat artificial, and there is no reason to make it in most applications.

2. Stochastic processes with non-constant lifetimes. In this paper, it will be convenient to consider random variables not necessarily defined almost everywhere on their defining measure space. This fact makes necessary slight extensions of well-known concepts, as sketched below.

In discussing random variables, we shall always assume that there is a specified space Ω, on subsets of which the random variables are

defined. The random variables will have values in a «state space» R. A Borel field of sets, called measurable sets, is specified on each of the spaces R, Ω. A probability measure $\mathbf{P}$ is defined on the field of measurable subsets of Ω. A function defined on a subset of Ω, with range a subset of R, is called measurable if the inverse image of a measurable set is measurable. The domain of the function is then measurable. Such a function will also be called a random variable. The value of a random variable x at the point ω will be denoted by $x(\omega)$. Conditional probabilities and expectations relative to a class of random variables are defined, in the usual way, relative to the minimum Borel field with respect to which every member of the conditioning class is measurable. Conditioned random variables will be defined almost everywhere. Thus conditional probabilities and expectations are themselves random variables, defined almost everywhere.

In the applications to be made in this paper, the state space will always be a separable locally compact Hausdorff space, and its measurable sets will be its Borel sets.

A stochastic process is a family of random variables. We shall for most part consider stochastic processes with parameter space the interval $[0, \infty)$. If $\{x(t),\ t \geqslant 0\}$ is such a stochastic process, the function $x(\cdot, \omega)$ will be called the ω path. If $x(0) = \xi$ is a constant with probability 1, the process will be called a process from the point ξ. We shall only consider processes of the following type. Let τ be a numerically-valued positive (by which we shall always mean non-negative) possibly infinite-valued random variable, defined almost everywhere on Ω, and, for each $t \geqslant 0$, let $x(t)$ be a random variable defined on the Ω set $\{\tau(\omega) > t\}$. The family of random variables $\{x(t),\ t \geqslant 0\}$ will be called a stochastic process of lifetime τ. The value $\tau(\omega)$ will be called the lifetime of the ω path. If τ_1 is a random variable, with $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau$, a new stochastic process can be defined by replacing the domain of definition of $x(t)$ by the possibly smaller set $\{\tau_1(\omega) > t\}$. The new process will be said to be obtained from the old one by curtailing it to have lifetime τ_1.

3. Markov processes. Let $\{x(t),\ t \geqslant 0\}$ be a stochastic process, of lifetime τ. For each value of $t > 0$, let $\mathscr{F}(t)$ be a Borel field of measurable sets, and suppose that the following conditions are satisfied.

(M1) $\mathscr{F}(s) \subset \mathscr{F}(t)$ *if* $s < t$.

(M2) *For each* $t \geqslant 0$, $x(t)$ *is measurable with respect to the field* $\mathscr{F}(t)$ *or equal almost everywhere on its domain of definition to a function that is.*

(M3) *If* $s > 0$, $\{\tau(\omega) > s\} \in \mathscr{F}(s)$ *or at least the set on the left differs from some set in the field on the right by a set of measure* 0.

(M4) *If* A *is a measurable subset of the range space* R, *and if* $s < t$, *then*

$$\mathbf{P}\{x(t, \omega) \in A \,|\, \mathscr{F}(s)\} = \mathbf{P}\{x(t, \omega) \in A \,|\, x(s)\}, \tag{3.1}$$

almost everywhere on the set $\{\tau(\omega) > s\}$.

Then the $x(t)$ process will be called a Markov process relative to the $\mathscr{F}(t)$ family of fields. Any such process is necessarily a Markov process

relative to the possibly smaller family $\{\mathscr{F}_0(t),\ t \geqslant 0\}$, where $\mathscr{F}_0(t)$ is the smallest Borel field of sets with respect to which each random variable $x(s)$ with $s \leqslant t$ is measurable.

The definitions we have given are all for the parameter interval $[0, \infty)$. The adaptation to other parameter sets is obvious, and will be omitted. The hypothesis that τ is defined almost everywhere can be dropped, but this extension will be unnecessary in the present paper.

Suppose that, to each real number t, to each point ξ in the state space R, and to each measurable subset of R, there corresponds a number $P(t, \xi, A)$ with the following properties.

(T1) $$P(t, \xi, A) = 0 \text{ if } t < 0$$

$$P(0, \xi, A) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi \in A \\ 0 & \text{if } \xi \in R \setminus A. \end{cases}$$

(T2) *For each* (t, ξ), $P(t, \xi, \cdot)$ *is a non-negative and completely additive set function, with* $P(t, \xi, R) \leqslant 1$.

(T3) *For each* (t, A), $P(t, \cdot, A)$ *is measurable.*

(T4) *The Chapman — Kolmogorov equation is satisfied*:

$$P(s + t, \xi, A) = \int_R P(t, \eta, A)\, P(s, \xi, d\eta); \quad s, t \geqslant 0.$$

Then P is called a (stationary) stochastic transition function. If there is equality in (T2), it is well-known that (at least if R is separable and locally compact and if its measurable subsets are its Borel sets, as we shall always suppose in the following) there is a Markov process, of infinite lifetime, with P as transition function, and with an arbitrary initial distribution.

We shall need a slightly stronger result. Suppose that inequality is allowed in (T2). It follows easily that $P(t, \xi, R)$ does not increase as t increases. Suppose now, to avoid pathological complications, that we add a regularity condition, as follows.

(T5) *For each* ξ, $\lim_{t \downarrow 0} P(t, \xi, R) = 1$.

Under this added condition we shall show that there exists a Markov process, as in the preceding paragraph, except that the lifetime may be finite with positive probability. To prove this result, adjoin a single point ∞ to R, obtaining a new state space R'. By definition, ∞ is an isolated point of R', and the measurable subsets of R' are the measurable subsets of R, with or without the point ∞ adjoined to them. We define the stochastic transition function P', with state space R', by setting $P'(t, \xi, A) = 0$, if $t < 0$, by setting $P' = P$ for triples on which P is defined, and, if $t \geqslant 0$, by setting

$$P'(t, \xi, \{\infty\}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi = \infty, \\ 1 - P(t, \xi, R) & \text{if } \xi \neq \infty. \end{cases}$$

Then $P'(t, \xi, R') = 1$ when $\xi \in R'$ and $t \geqslant 0$. Hence, if an initial distribution is specified, there is a Markov process $\{x(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ with state space R', transition function P', of infinite lifetime, defined on some measure space Ω. We allow only initial distributions confined to R. Let $\mathscr{F}(t)$ be the smallest Borel field of Ω sets with respect to which every random variable $x(s)$ with $s \leqslant t$ is measurable, and which includes all sets of measure 0. We shall prove that there is a Morkov process defined on Ω, with state space R, with the same initial distribution as the $x(t)$ process, and with transition function P. Since the details are simple, we shall only sketch them. The duration of the desired process is defined as follows. For each ω path of the $x(t)$ process define $\tau(\omega)$ as the supremum of the values of r for which r is rational and $x(r, \omega) \neq \infty$. Then τ is strictly positive for almost all ω, in view of (T5), and $\{\tau(\omega) \geqslant t\} \in \mathscr{F}(t)$. To establish this relation with «$\geqslant$» replaced by «$>$», we shall show that $\{\tau(\omega) = t\} \in \mathscr{F}(t)$. This relation is a consequence of the fact that the two sets $\{\tau(\omega) = t\}$, $\{x(r, \omega) \neq \infty, \ r < t \ (r \text{ rational}); x(t, \omega) = \infty\}$ differ by at most a set of measure 0, in view of (T5). If the $x(t)$ process is curtailed to have lifetime τ, it remains a Markov process with transition function P', but it now has the property that, for each value of t, the probability is 0 that an ω path is at ∞ at time t. If now we define $x_0(t)$, on the set $\{\tau(\omega) > t\}$, as an arbitrary point of R whenever $x(t)$ has the value ∞, and otherwise as equal to $x(t)$, the $x_0(t)$ process is the desired one.

4. Definition of Brownian motion. We adopt the standard definition of a Brownian motion process, with variance parameter a strictly positive constant, in a multidimensional Euclidean space, but make the unessential restriction that almost all paths be continuous. The initial distribution is arbitrary. If such a process has been curtailed to have a lifetime which is finite with positive probability, it will be called a curtailed Brownian motion process. The curtailed process will be a Markov process if the lifetime is the time to the first meeting of a path with a specified closed set.

We accept the usual definition (see [1]) of a Green space of dimensionality $\geqslant 1$, except that we do not make dimensionality 2 exceptional. A Green space of dimensionality N is thus a separable Hausdorff space, provided with certain parametrized neighborhoods. A parametrized neighborhood D of a point ξ is a neighborhood which is homeomorphic to an N-dimensional open solid sphere, the parameter sphere, whose radius will be called the radius of D. The point ξ will be called the center of D if its image is the center of the parameter sphere. If two parametrized neighborhoods intersect in the set A, A has images A_1, A_2 in the corresponding parameter spheres, and the induced transformation between A_1 and A_2 is by definition a rigid motion. The parametrized spheres form a basis for the topology of R. If ξ, η are two points in a parametrized neighborhood, $|\xi - \eta|$ will denote the distance between their images in any corresponding parameter sphere. Lebesgue measure is meaningful on a Green space. That of the set A will be denoted by $|A|$, and the volume differential will be denoted by $d\xi$, $d\eta$, and so on. Any open connected

set of Euclidean N-space is a Green space, if the obvious local parameter definitions are made.

Let R be a Green space of dimension N, and let P be a transition function with state space R. There is then a Markov process $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$, defined on a measure space Ω, with a specified initial distribution, and with transition function P. Let τ be the lifetime of this process, and let $\mathscr{F}(t)$ be the smallest Borel field with respect to which every $z(s)$ with $s \leqslant t$ is measurable. Then the process is Markov relative to the $\mathscr{F}(t)$ family of fields. The transition function P will be called a Brownian motion transition function with variance parameter σ^2 where σ^2 is a strictly positive constant, if the following four conditions are satisfied.

(B1) *For any initial distribution, it is possible to define a $z(t)$ process as above in such a way that almost all its sample functions are continuous.* It will be supposed below that such a choice has been made.

(B2) *For any initial distribution, almost every sample path which enters a parametrized neighborhood meets the boundary of the neighborhood at some later time.*

Let τ_0 be a random variable, with $0 \leqslant \tau_0(\omega) < \tau(\omega)$ whenever $\tau_0(\omega) < \infty$, satisfying (M3), and let Ω' be the subset of Ω on which $\tau_0(\omega) < \infty$. If $\mathbf{P}\{\Omega'\} > 0$, define a measure $\mathbf{P}'$ by setting $\mathbf{P}'\{\Lambda\} = \mathbf{P}\{\Lambda\} / \mathbf{P}\{\Omega'\}$ for every set Λ which is a measurable subset of Ω'. For each $t \geqslant 0$, let $y(t)$ be the random variable defined where $\tau_0(\omega) + t < \tau(\omega)$ by setting $y(t, \omega) = x[\tau_0(\omega) + t, \omega]$. Define $x_1(t, \omega) = x[a_t(\omega), \omega]$, where $a_t = \min(\tau_0, t)$.

(B3) *Considered as processes on Ω', the $x_1(t)$ and $y(t)$ processes are independent of each other, for given $y(0)$. The $y(t)$ process on Ω' is a Markov process with stochastic transition function P.*

(B4) *Let D be a parametrized neighborhood, suppose that $x[\tau_0(\omega), \omega] \in D$ on Ω', and if $\omega \in \Omega'$, let $\tau_1(\omega)$ be the first parameter value $> \tau_0$ at which the ω path meets the boundary of D. Then the $y(t)$ process (on Ω') induces a process on the parameter sphere $\hat{D}$ corresponding to D. This process is a Brownian motion process with variance parameter σ^2, with initial distribution, the distribution of the image of $y(0)$, and lifetime $\tau_1 - \tau_0$, the time of the first meeting of a path with the boundary of $\hat{D}$.*

A process with state space R will be called a Brownian motion process if it is a Markov process, with almost all sample paths continuous having a Brownian motion transition function as its transition function. Thus a Brownian motion process has the properties (B1—B4).

If $\tau_0(\omega) = 0$ in (B4), and if the initial distribution is concentrated at a point of D, we see that a Brownian motion process from a point of R starts out as the image of a Brownian motion in Euclidean space from a point of the sphere $\hat{D}$.

5. Examples of Brownian motion processes. As a particular case, suppose that R is an open connected set of (unextended) Euclidean N-space, with the obvious parametrizations. Then a curtailed Brownian motion in the usual sense, with lifetime (the time $\leqslant \infty$) it takes a path to reach the boundary, is a Brownian motion in the new sense. The validity of (B3), (B4) was proved by Hunt [5]. Conversely a Brownian motion on R in the new sense is one in the old, curtailed as described, according to

the uniqueness theorem to be proved below. If R is bounded, the life time of the process is finite, with probability 1. If $N>2$, and if the complement of R has positive finite capacity, the lifetime is infinite with positive probability, less than 1. If R is the whole space, or, more generally, if the complement of R has zero capacity, the lifetime is infinite with probability 1.

A less trivial special case is the following. Let R be a covering space of an open subset of N-dimensional Euclidean space R_0, in the following sense. There is a single-valued continuous transformation Φ of R into R_0. If $\xi \in R$, there is a parametrized sphere, a neighborhood of ξ, which goes under Φ in a one to one bicontinuous way onto an open subset of R_0 containing $\Phi(\xi)$. We shall say that ξ projects into $\Phi(\xi)$. Then a continuous curve on R projects into a continuous curve on R_0. If C is a continuous curve on R_0, with initial point ξ', and if $\Phi(\xi)=\xi'$ there is a unique maximal continuous curve on R which has initial point ξ and projects into an arc C_0 of C, which may be C itself but otherwise does not contain its endpoint. To make R into a Green surface we need only parametrize it in the obvious way, in terms of the projection transformation. A Brownian motion process on R is now easily defined. It is sufficient to assume that the initial distribution is confined to the single point ξ of R. The probability distribution of continuous curves with initial point ξ is defined in terms of the Brownian probability distribution of the image curves on R_0. This is possible because of the one to one transformation between continuous curves on R with initial point ξ and their projections on R_0.

To see the possibilities of this type of example, let $N=2$, and let R be the Riemann surface of the logarithm function, considered spread over the finite complex plane R_0, less the origin, with the natural definition of projection. In this case it is easy to see that the lifetime of a Brownian motion process is $+\infty$ with probability 1. It will be seen below that almost all paths of a Brownian motion process on R are everywhere dense, even considering only parameter values larger than any specified number. On the other hand, if R is the Riemann surface of the elliptic modular function, spread as usual over the finite plane less two points, the Brownian trajectories will be seen to behave quite differently. Although the lifetime of a Brownian motion process on the space is again $+\infty$ with probability 1, almost all paths are nowhere dense.

6. Heat motion processes. Let R be a Green space of dimension N. We shall always denote by $R(\pm)$ the direct product of R with the real line, by $R(+)$ the direct product of R with the half-line $(0, \infty)$. The spaces $R(\pm)$ and $R(+)$ are given the product topology determined by their factors. Any open nonempty subset of $R(\pm)$ will be called a heat space of dimensionality $N+1$. Heat spaces are the natural domains of definition of the functions involved in studying the heat equation. Corresponding to Brownian motion processes on Green spaces are heat motion processes on heat spaces, which are defined as follows. A heat motion process on $R(\pm)$ from the point (s, ξ), where s is a real number and ξ is a point of R, is defined as the stochastic process $\{[s-t, z(t)], t \geqslant 0\}$,

where the stochastic process $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ is a Brownian motion process on R, from ξ. A heat motion process on the heat space $\hat{R}$, a subset of $R(\pm)$, from the point (s, ξ), is defined as a heat motion process on $R(\pm)$ from (s, ξ), curtailed to have lifetime the minimum of the lifetime of the $z(t)$ process and of the first time, if ever, that a heat path on $R(\pm)$ meets the boundary of $\hat{R}$. The heat motion processes are Markov processes, and those with general initial distributions are now defined as usual in terms of those with initial distributions concentrated at a point. Heat motion processes have been discussed in [3] under the hypothesis that R is a Euclidean space.

With the above notation, let $\hat{R}(s)$ be the subset of R with $(s, \eta) \in \hat{R}$. Define $P(s, t, \xi, A)$ by

$$P(s, t, \xi, A) = \begin{cases} \mathbf{P}\{\tau(\omega) > s - t,\ z(s - t, \omega) \in A\} & \text{if } s \geqslant t \\ 0 & \text{if } s < t \end{cases}$$

where $\xi \in \hat{R}(s)$ and $A \subset \hat{R}(t)$. (The function P is not the transition probability function of the heat process on $\hat{R}$, but the transition function, which is stationary, is easily expressed in terms of P). The value $P(s, t, \xi, A)$ is the probability that, if the path is initially at the point (s, ξ), it will lie in the subset of $\hat{R}$ with first coordinate t, second coordinate in A, at time $s - t$.

Properties (B3) and (B4) of Brownian motion processes will be called the continuation property of Brownian motion below. It is almost trivial that the heat motion processes obey the obvious analogues of (B3) and (B4), and these will be called the continuation property of heat motion processes.

7. Two elementary properties of Brownian paths. The following two theorems will be useful in later work.

Theorem 7.1. *Let R be a non-compact Green space, and let D be an open subset of R, with compact closure. Then almost every Brownian path from a point of D meets the boundary of D.*

The proof will be carried through by induction, as follows. We may and shall assume that D is the union of finitely many parametrized neighborhoods. The theorem is true, according to property (B2), if there is only one component neighborhood. Now suppose that the theorem is true if there are $n \geqslant 1$ component neighborhoods, and suppose that D is the union of $n+1$ neighborhoods. Let $D = D_1 \cup D_2$, where D_1 is the union of n of these neighborhoods and D_2 is the remaining one. Enlarging these neighborhoods slightly, if necessary, we can and shall assume that any two which intersect do so non-tangentially. Since R is not compact, D has a boundary point, which must be a boundary point of one of the neighborhoods. We choose D_2 to be a neighborhood whose boundary contains a boundary point of D. In proving that the theorem is true for this choice of D, we can and shall assume that the set S of boundary points of D_1 which lie in D_2 is not empty. In the contrary case the conclusion is trivially true. Now consider the probability that a Brownian path from the point η of S will first meet the boundary

of D_2 at a point not in D_1. Translating the situation into the corresponding one on the parameter sphere $\hat{D}_2$ corresponding to D_2, this probability is the value at η of the function harmonic in $\hat{D}_2$, with boundary value 1 at the boundary points of $\hat{D}_2$ not the images of points in D_1, and 0 at other boundary points. This function has a strictly positive minimum δ. A Brownian path from a point ξ of D_1 meets the boundary of D_1 for the first time (as it does with probability 1 according to the induction hypothesis) either in a point of the boundary of D, as desired, or in a point of S. In the latter case, applying the continuation principle, the path has probability at least δ of going on to meet the boundary of D without leaving D_2, and so probability at most $1-\delta$ of not meeting the boundary of D. If however this path goes on to meet the boundary of D_2 in a point of D_1, the argument can be repeated, and the probability of missing the boundary of D in two tries is at most $(1-\delta)^2$. Continuing this reasoning, we find that almost every path from ξ in D_1 finally meets the boundary of D, as was to be proved. The proof is trivially modified if $\xi \in D_2$.

Theorem 7.2. *Let R be a non-compact Green space, and let $R_1 \subset R_2 \subset \cdots$ be open sets, with compact closures and union R. Let $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ be a Brownian motion process on R, of lifetime τ, with $z(0,\omega) \in R_1$ and let τ_n be the time a path first meets the boundary of R_n. Then $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ with probability 1.*

If $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau' < \tau$ with positive probability, there is a parametrized neighborhood D such that $z(\tau')$ takes on values in D with positive probability. This obviously contradicts the Brownian motion property (B1).

The proof of this theorem also shows at once that, whether R is compact or not, almost no path of a Brownian motion process on R converges to a point of R as the parameter value approaches the path lifetime. This result will be strengthened below.

Let R be a Green space and let R_1 be an open subset of R. If $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ is a Brownian motion process on R whose initial distribution is confined to R_1, let $\tau(\omega)$ $(\leqslant \infty)$ be the minimum of the lifetime of this process and the time the ω path first meets $R \setminus R_1$, if ever. Then, if the $z(t)$ process is curtailed to have lifetime τ_1, it becomes a Brownian motion process with state space R_1. Since a compact Green space less the closure of a neighborhood of a point (not the whole space) is no longer compact, the preceding theorems imply easily that almost all paths of a Brownian motion process on a compact Green space are everywhere dense, but a more general result will be obtained below by other methods.

8. **Brownian motion existence and uniqueness.** In consonance with the spirit of this paper, direct constructive methods will be used in studying existence and uniqueness, rather than, for example, semigroup methods.

Theorem 8.1. *Let R be a Green space. There is then one and only one Brownian transition function with state space R and specified value of the variance parameter.*

We note, without stating the fact as a separate theorem, that the truth of this theorem implies that of the corresponding theorem for heat motion processes on heat spaces.

Note that the uniqueness statement implies that the distribution of the lifetime of a Brownian motion process on R is uniquely determined by the value of the variance parameter together with the initial distribution.

We shall prove the theorem under the hypothesis that R is not compact. The proof in the compact case is similar. We first prove the uniqueness assertion, by showing that, if $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ is a Brownian motion process on R, from the point ξ, then the joint distributions of the random variables of this process are uniquely determined by the specified value σ^2 of the variance parameter. Let D_1, D_2,.... be parametrized neighborhoods on R, with union R, chosen in such a way that $\xi \in D_1$, that D_{n+1} is not contained in $R_n = \bigcup_1^n D_j$ and that D_{n+1} has a non-null intersection with R_n. Let τ_1 be the time a Brownian path from ξ first meets the boundary of D_1. The process, after curtailment to have lifetime τ_1, is the image of a Brownian motion process in N-dimensional space, curtailed to have lifetime the time from its initial point, the image of ξ, until its paths meet the parameter sphere which is the image of D_1. Since a rigid motion of N-space takes a Brownian motion on the space into another, without changing the variance parameter, the $z(t)$ process distributions must be uniquely determined up to time τ_1. That is, if $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$, and if $A_1, \ldots, A_n$ are Borel subsets of R,

$$\mathbf{P}\{z(t_j, \omega) \in A_j, \quad j \leqslant n, \quad \tau_1(\omega) > t_n\} \tag{8.1}$$

is uniquely determined, as is the distribution of the first intersection $z[\tau_1(\omega), \omega]$ of a path with the boundary of D_1. Let C_1 $[C_2]$ be the part of the boundary of D_1 $[D_2]$ in D_2 $[D_1]$. According to our hypotheses, the paths from time τ_1 on, if $z[\tau_1(\omega), \omega] \in C_1$, are the images of Brownian paths in the parameter image of D_2, with the specified initial distribution on C_1, until the first time τ_{12} that the paths meet the boundary of D_2. We also define $\tau_{12}(\omega) = \tau_1(\omega)$ if $z[\tau_1(\omega), \omega] \overline{\in} C_1$. Then $\tau_{12}(\omega) \geqslant \tau_1(\omega)$, and clearly the probability (8.1) with τ_1 replaced by τ_{12} is uniquely determined, according to the continuation principle. Let $\tau_{13}(\omega) = \tau_{12}(\omega)$ if $z[\tau_{12}(\omega), \omega] \overline{\in} D_1$, and otherwise, that is, for an ω path with $z[\tau_{13}(\omega), \omega] \in C_2$, let $\tau_{13}(\omega)$ be the first time $> \tau_{12}(\omega)$ that the ω path meets the boundary of D_1. Then $\tau_{13} \geqslant \tau_{12}$, and, repeating the above argument, the probability (8.1) with τ_1 replaced by τ_{13} is uniquely determined. Continuing the alternation, we get a sequence of times $\tau_{11} \leqslant \tau_{12} \leqslant \cdots$ with limit τ_2, the first time a Brownian path meets the boundary of $D_1 \cup D_2$. The probability (8.1) with τ_1 replaced by τ_{1n} and hence if replaced by τ_2 is uniquely determined. Proceeding by induction, it is easily seen that, if τ_n is the first time a path meets the boundary of R_n, (8.1) with τ_1 replaced by τ_n is uniquely determined. When $n \to \infty$, $\tau_n \to \tau$, where τ is the lifetime of the Brownian motion process, by Theorem 7.2, and we find that (8.1) with τ_1 replaced by τ is uniquely determined, as was to be proved.

To prove the existence assertion of the theorem, we need only convert the preceding uniqueness argument into a constructive method. The procedure is straightforward, and will be omitted.

9. Immediate generalizations of properties valid in the Euclidean case. Since Brownian motion processes on a Green space and heat motion processes on a heat space are defined in terms of the corresponding processes on Euclidean spaces, many of the known properties of the processes in the latter case are either a fortiori trivially true for general spaces or deducible for them by the methods used for Euclidean spaces. For details in the latter case we refer to the bibliography [2, 3, 6]. A fixed variance parameter value σ^2 is assumed throughout the following discussion. A parabolic function is a function defined on an open set of a heat space, and locally parabolic. That is, it has continuous partial derivatives satisfying the heat equation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \sum_1^N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_j^2}, \tag{9.1}$$

locally. Here φ is expressed as a function of the local parameter $(t, \xi_1, \ldots, \xi_N)$. The validity of (9.1) is unaffected by the choice of local parameter. Subparabolic (superparabolic) functions are functions defined on open sets of heat spaces, and locally subparabolic (superparabolic) as functions of the local parameters. It will be convenient to call a function antiparabolic if it is a parabolic function of $(-t, \xi)$, and the definition of antisubparabolic and antisuperparabolic functions are formulated correspondingly.

We find at once that, in view of the corresponding facts for Euclidean spaces, if u is a function subharmonic (subparabolic) on an open subset of a Green (heat) space, then u is a finite-valued continuous (right-continuous with left limits existing and finite) function of the path parameter on almost every path of a Brownian (heat) motion process on the space, considering only parameter values placing the path in the domain of definition of u and excluding the parameter value 0 if u is defined and infinite-valued at the initial point of the path.

If $u_A(\xi)$ is the probability that a Brownian path on a Green space, from the point ξ, will ever, at a strictly positive time, meet a closed set A, then, using the continuation principle, it follows that u_A is a function superharmonic on R, harmonic on $R \setminus A$. If $U_A(\xi)$ is the probability that a Brownian path from the point ξ meets A at parameter values arbitrarily near the path lifetime, then U_A is a function harmonic on the Green space. If heat paths on a heat space are considered, instead of Brownian paths on a Green space, the preceding statements remain true if «harmonic» is replaced by «parabolic». We shall always use u_A and U_A to refer to the situation on a Green space, however. With proper care, these functions can be defined for a class of sets including the Borel sets, and suitable modifications of the stated results remain true, according to [6]. Since u_A is positive and superharmonic, it vanishes either at no point of R or everywhere on R, if R is connected.

Appealing to the known facts in the Euclidean case, we find that u_A vanishes identically if and only if A has zero capacity.

In particular, it follows from the above that, if R is a Green space, and if A is a Borel subset of R, then the probability $P(t, \xi, A)$, which is the probability that a heat motion path on $R(\pm)$ from (t, ξ) meet a certain set, though not usually defined in this way, defines a parabolic function of (t, ξ) on $R(+)$. Similarly the probability that a Brownian path from the point ξ or R will meet the closed set A at some time $\leqslant t$ defines a parabolic function of (t, ξ) for $t > 0$, $\xi \in R \setminus A$.

10. Transition densities. Less easily deducible from the Euclidean case is the fact that the transition probability $P(t, \xi, A)$ of a Brownian motion process on a Green space R can be expressed in terms of a positive continuous density function satisfying the Chapman—Kolmogorov equation. The following is a sketch of a proof of this fact, due to Hunt [5] when R is a domain of Euclidean N-space.

Let $D_1 \subset D_2$ be parametrized neighborhoods on R, corresponding to concentric parameter spheres. Let S_i be the boundary of D_i and let A be a closed subset of D_2. If $\xi \in D_2$, let $Q(t, \xi, A)$ be the probability that a Brownian path from ξ not meet S_2 before time t and be in A at time t. In other words, $Q(t, \xi, A)$ is the transition probability for a Brownian motion process with state space D_2. Since D_2 is the image of a sphere, it is known that Q is given by a density $q(t, \xi, \eta)$, where q is continuous in all three variables, for $t > 0$ and ξ, η in $D_2 \cup S_2$, with $q(t, \xi, \eta) = q(t, \eta, \xi)$. Let B be a set in the product space of the interval $[0, \infty)$ and S_1, belonging to the product field of their topological Borel fields. Let $\nu(\xi, B)$ be the expected number of times that a Brownian path from ξ meets S_1 at a time t (which is the first intersection after some intersection with S_2) at a point ζ, with $(t, \zeta) \in B$. Then we show that $\nu(\xi, B)$ is finite if B is the direct product of a finite interval and ${}_1S$, or a subset of such a direct product. In fact the successive times from the first crossing of S_1 after a crossing of S_2 until the next crossing of S_2 are strictly positive mutually independent random variables with a common distribution function, so that the expected number with sum less than a specified time is finite. For such a set B, $\nu(\cdot, B)$ is continuous on $R \setminus (D_2 \cup S_2)$, as the value at $s = 0$ of a parabolic function of (s, ξ), the expected number of times that a heat path from (s, ξ) meets a certain set on a heat space in a certain way.

An application of the continuation principle now yields the formula

$$P(t, \xi, A) = \int_A d\eta \int q(t - s, \zeta, \eta)\, \nu(\xi, d_{s,\zeta}), \quad \xi \in R \setminus (D_2 \cup S_2), \; A \subset D_1,$$

in which the domain of the (s, ζ) integration is the direct product of $[0, t]$ and S_1. Then P can be expressed as the integral of a denisity p,

$$p(t, \xi, \eta) = \int q(t - s, \zeta, \eta)\, \nu(\xi, d_{s,\zeta}), \quad \xi \in R \setminus (D_2 \cup S_2), \quad \eta \in D_1. \tag{10.1}$$

In order to derive the needed properties of p we shall use the fact that $q(t, \xi, \eta)$ defines, for fixed η, a parabolic function of (t, ξ), for $t > 0$,

$\xi \in D_2$, with boundary value 0 when $\xi \in S_2$. Moreover $\lim_{t \to 0} q(t, \xi, \eta) = 0$ uniformly for $|\xi - \eta| > \delta$, where δ is any strictly positive number. As defined by (10.1), p is continuous, and therefore varying D_1, D_2 cannot give contradictory values of p, since there can be only one continuous density function for the measure $P(t, \xi, \cdot)$. Varying these neighborhoods leads to a definition of p for all $t > 0$, $\eta \neq \xi$. A slight modification of the discussion would allow us to make D_1 contain ξ, and, in this way, we can finally obtain p as a continuous function of (t, ξ, η) for $t > 0$, $\xi, \eta \in R$. Moreover this modification yields the inequality $q \leqslant p$ at any point where both functions are defined. It is convenient to define p and q as 0 when $t \leqslant 0$.

Since $P(t, \xi, A)$ defines a parabolic function of (t, ξ) for $t > 0$, $\xi \in R \setminus A$, if A is a closed set, the very expression of p as the limit of a difference quotient shows that, for each value of η, $p(t, \xi, \eta)$ defines a parabolic function of (t, ξ) for $t > 0$, $\xi \in R \setminus \{\eta\}$, and hence, by continuity, a parabolic function on $R(+)$. On the other hand, if ξ is fixed, the expression (10.1) shows that $p(t, \xi, \eta)$ defines a parabolic function of (t, η) on $R(+)$ less the points with $\eta = \xi$, and these points are then included by continuity. It will be shown later that p is a symmetric function of its second and third arguments. In the light of the above remarks it follows easily from (10.1) that $\lim_{t \to 0} p(t, \xi, \eta) = 0$ uniformly for ξ, η in any compact disjunct sets. Hence p defines a superparabolic function of (t, ξ) for fixed η (parabolic except at $(0, \eta)$) and a superparabolic function of (t, η) (parabolic except at $(0, \xi)$).

Whenever ξ, η are points of the same parametrized neighborhood on R, we define

$$p_0(t, \xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\dfrac{|\xi - \eta|^2}{2t\sigma^2}\right)}{(2\pi\sigma^2 t)^{N/2}}, & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{if } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Then p_0 is symmetric in its last two arguments, is superparabolic as a function of (t, ξ) for fixed η, parabolic except at the point $(0, \eta)$. Choose any parametrized neighborhood D_2 and define $q(t, \xi, \eta)$ as above. Then, if $\delta(t, \xi)$ is the probability that a Brownian path from $\xi \in D_2$ reaches the boundary of D_2 by time t,

$$\delta(t, \xi) = 1 - \int_D q(t, \xi, \eta)\, d\eta.$$

Moreover, applying the continuation principle we find that

$$p_0 - K\delta \leqslant q \leqslant p \leqslant p_0 + K\delta, \text{ if } \xi, \eta \in D_2$$

where K is the maximum of $p(s, \zeta, \eta)$ for $s \leqslant t$, ζ on the boundary of D_2. As $t \to 0$, $\delta(t, \xi) \to 0$ uniformly for ξ in any closed subset of D_2. This implies that $p - q$ and $p - p_0$ are continuous where p_0 is defined, and hence that these differences are parabolic as functions of (t, ξ) for fixed η and as functions of (t, η) for fixed ξ.

Finally, we shall use the fact, obvious from (10.1) and the stated properties of q and ν, that $p(t, \xi, \eta)$ defines a bounded function if its arguments are restricted by the conditions that t be in a bounded set, that ξ not be in a specified parametrized neighborhood, and that η be in a closed subset of this neighborhood, or, a fortiori, by the conditions that t be in a bounded set, that ξ not be in a specified open set and that η be in a compact subset of this open set.

Now consider the integral

$$\int_R f(\eta) P(s, \xi, d\eta) = \int_R f(\eta) p(s, \xi, \eta) d\eta.$$

This integral defines a parabolic function of (s, ξ) on $R(+)$, if f is bounded and Lebesgue measurable on R, hence, if f is non-negative and Lebesgue measurable, the integral defines a function which is either identically $+\infty$, or is $+\infty$ for $s > c$ (where c is some strictly positive constant) and is parabolic for $s < c$, or is parabolic on the whole space $R(+)$. In particular, if $t > 0$ and ζ are fixed, the integral

$$\int_R p(s, \xi, \eta) p(t, \eta, \zeta) d\eta$$

defines such a function. In view of the Chapman—Kolmogorov equation however, if s, t are fixed and strictly positive, and if ξ is fixed,

$$p(s + t, \xi, \zeta) = \int_R p(s, \xi, \eta) p(t, \eta, \zeta) d\eta \tag{10.2}$$

for almost all ζ. From now on, we choose t once and for all and hold it fast. If ζ is chosen to make the right side of (10.2) finite and equal to the left side for almost all (s, ξ) with $s > 0$, it follows that the right side is even finite for all (s, ξ) on $R(+)$ and defines a parabolic function there. Hence, by continuity, the two sides of (10.2) are equal on $R(+)$ (for the particular values of t, ζ chosen). Now, fixing s, ξ, t, the right side of (10.2) defines a positive lower semicontinuous function of ζ which we have just seen coincides almost everywhere with a continuous function, that defined by the left side. The right side must therefore be finite for all ζ, and it follows from the argument just given that the two sides of (10.2) are equal for all values of their arguments, keeping the general restriction that all parameter values involved are strictly positive.

Let R be a Green space, and let $\hat{R}$ be a heat space built on it as described in Section 6. Let $P(s, t, \xi, A)$ be the transition probability defined in that section, corresponding to a heat motion process on $\hat{R}$. Then, if A is a closed subset of $\hat{R}(t)$, direct generalizations of our previous arguments, involving no change of method, show that, for each real number t, $P(s, t, \xi, A)$ defines a function of (s, ξ) on $\hat{R}$ which is parabolic except when simultaneously $s = t$ and $\xi \in A$, and is everywhere superparabolic. Moreover $P(s, t, \xi, \cdot)$ is generated by a unique continuous density function $p(s, t, \xi, \cdot)$, when $t > 0$. Here $\xi \in \hat{R}(s)$, $\eta \in \hat{R}(t)$, and we define p as 0 when $t \leqslant 0$. The function p is continuous except when simultaneously $s = t$ and $\xi = \eta$. The function of (s, ξ) defined by

$p(s, t, \xi, \eta_1)$ for fixed (t, η) is superparabolic on $\hat{R}$, parabolic except at (t, η), whereas for fixed (s, ξ) we obtain a function of (t, η) antisuperparabolic on $\hat{R}$, parabolic except at (s, ξ). The difference $p(s, t, \xi, \eta_1) - p_0(s - t, \xi, \eta)$ defines a continuous function of its arguments, for $(s, \xi) \in \hat{R}$, $(t, \eta) \in \hat{R}$, and ξ, η in the same parametrized neighborhood on R. For fixed (s, ξ) $[(t, \eta)]$ this function becomes an antiparabolic (parabolic) function of (t, η) $[(s, \xi)]$.

11. Martingale theorems. Let R be a Green space, and let D be an open subset of R, with a compact closure. We suppose that almost every Brownian path from a point of D meets the boundary of D. This condition is necessarily satisfied, according to the results of Section 7, if R is not compact or if R is compact and D is not everywhere dense.

Let $\{z_1(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ be a Brownian motion process on R, from the point ξ of D, and let τ_0 be the time a path first meets the boundary of D. Let $\{z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ be this process stopped when it meets the boundary of D, that is,

$$z(t, \omega) = \begin{cases} z_1(t, \omega) & \text{if } t \leqslant \tau_0(\omega) \\ z_1[\tau_0(\omega), \omega] & \text{if } t > \tau_0(\omega) \end{cases}$$

Let u be defined and subharmonic (harmonic) on an open set containing the closure of D. Then we shall show that the process $\{u[z(t)], 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ is a semimartingale (martingale), excluding $t = 0$ if $u(\xi) = -\infty$. We give the proof under the hypothesis that R is not compact. The proof is slighty modified in the compact case. This theorem is known [2] if R is a domain of Euclidean N-space. It is therefore true in the general case if D is a parametrized neighborhood (since then R can be replaced by a parametrized neighborhood including the closure of D, and the problem is thus reduced to that for Euclidean spaces). If D is now unrestricted, except as in the orginal assertion, we use the notation of the proof of Theorem 8.1. It is no restriction to suppose that u is defined on R, decreasing R if necessary to make this true, and we shall so suppose. The $u[z(t)]$ process, stopped at time τ_1 is a semimartingale (martingale), excluding $t=0$ if $u(\xi) = -\infty$. In fact this is the special case just considered, when D is a parametrized neighborhood. An application of the continuation principle now shows that the $u[z(t)]$ process, stopped at time τ_{12} is a semimartingale (martingale), excluding $t = 0$ if $u(\xi) = -\infty$, and so on, so that in the limit we find that the same is true if the process is stopped at any time τ_n.

Since D has compact closure, $\tau_n > \tau_0$ with probability 1, if n is chosen properly, as will now be supposed. Then if the earlier stopping time τ_0 is used, the stopped process preserves the semimartingale (martingale) property.

This result will be extended in the way done for Euclidean spaces, so that D need not have compact closure and can be replaced by R itself, after the generalizations of Fatou's boundary value theorem have been discussed. Before going into this, however, we sketch an important application. Suppose that $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ is a Brownian motion process from a point ξ of the non-compact Green space R, and that the lifetime of

the process is ∞, with probability 1. Then, if u is subharmonic on R, one can consider the process $\{u[z(t)],\ t \geqslant 0\}$. Let $R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ be a sequence of open subsets of R with compact closures and union R, containing ξ, and let $\{z_n(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ be the $z(t)$ process stopped on the boundary of R_n. For each value of n, the $u[z_n(t)]$ process is a semimartingale or martingale if u is harmonic, excluding the parameter value 0 if $u(\xi) = -\infty$. Moreover $\lim_{n\to\infty} u[z_n(t)] = u[z(t)]$ with probability 1, for each value of t. If the usual conditions justifying the taking of limits under the integral sign (for example boundedness of u is far stronger than necessary) are satisfied, it follows that the $u[z(t)]$ process is a semimartingale, or a martingale, if u is harmonic, excluding $t = 0$ as usual, if necessary. In the case when R is Euclidean N-space, simple conditions on u weaker than boundedness are given in [2] which are sufficient to legitimize the above conclusion, although the derivation in the reference is quite different.

The above conclusions remain valid if subharmonic functions on a Green space and Brownian motion are replaced by functions subparabolic on a heat space and heat motion. The discussion needs no significant change. The theory on heat spaces, when fully developed, includes the theory on Green spaces, since a subparabolic function defined on $R(\pm)$ and not depending on the first argument reduces to a subharmonic function on R, and the heat motion processes on $R(\pm)$ project into Brownian motion processes on R.

12. The existence of boundary limits. The Fatou boundary limit theorem becomes the following, in the present context.

Theorem 12.1. *Let u be a function defined and subparabolic (subharmonic) on a heat (Green) space R, and suppose that $u \leqslant v$ on R, where v is parabolic (harmonic) and positive on R. Let $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ be a heat (Brownian) motion process on R, with lifetime τ. Then $\lim_{t\to\tau} u[z(t,\omega)]$ exists and is finite with probability 1.*

In other words, u has a limit along almost every heat (Brownian) path. Note that we have not yet discussed the character of these paths for parameter values near the path lifetimes. This will be done in the next section, where it will be shown that almost every path of a heat motion process leaves every compact subset of its heat space as the path parameter approaches the path lifetime, and that the same is true for Brownian paths on a Green space if there are any non-constant subharmonic functions satisfying the conditions of the theorem. The theorem is thus really a boundary limit theorem.

The hypotheses of the theorem impose no limitations on R, but of course the theorem is trivial if R is compact, since then u must be identically constant, so we shall suppose in sketching the proof that R is not compact. Since $u - v$ and $-v$ are subparabolic (subharmonic) and bounded from above by 0, it is sufficient to prove the theorem for functions bounded from above by 0, that is, it is sufficient to treat the case when $v = 0$. It is also sufficient to treat the case in which $z(0)$ is identically constant, say ξ. Under all these assumptions, if R_n and

$z_n(t)$ are defined as in Section 11, the process $\{u[z_n(t)],\ 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ has negative random variables, and, according to Section 11, is a semimartingale, excluding $t = 0$ if $u(\xi) = -\infty$. We wish to let $n \to \infty$ and use martingale convergence theorems. Since the proof goes through exactly as in the Euclidean case treated in [3], further details are omitted.

Let $u[z(\tau)]$ be interpreted to mean the limit of u along probability paths in the theorem. Then, under further conditions on u — boundedness from above is sufficient — the semimartingale inequality

$$u(\xi) \leqslant \mathbf{E}\{u[z_n(\infty)]\}$$

implies, when $n \to \infty$, the inequality

$$u(\xi) \leqslant \mathbf{E}\{u[z(\tau)]\}.$$

That is, $u(\xi)$ is at most equal to the average value of its limit along paths from ξ. Conditions necessary and sufficient for this to hold have been discussed in [3] and [4] in analogous cases, and these conditions are easily translated into the present case. Under such conditions, if u is subparabolic (subharmonic) on a heat (Green) space, the process defined by

$$x(t) = \begin{cases} u[z(t)], & t \leqslant \tau, \\ u[z(\tau)], & t > \tau, \end{cases}$$

on the parameter interval $[0, \infty]$ is a semimartingale, omitting $t = 0$ if $u(\xi) = -\infty$, and is a martingale if u is parabolic (harmonic). As always boundedness of u is sufficient but not necessary. This result, when stated with its proper hypotheses, is the full generalization of the theorems of Section 11.

13. The boundary of a Green space. Let R be a Green space. It is said to have a null boundary if the only subharmonic functions on it which are bounded from above (or, equivalently, which are bounded) are the constant functions. If R does not have a null boundary, it is said to have a positive boundary. Note that a boundary has not been defined in the latter case, only a type of Green space.

The following theorem will be useful in analyzing this boundary concept.

Theorem 13.1. *Let R be a Green space of dimension $\geqslant 2$. Then almost every path of finite lifetime of a Brownian motion process on R is nowhere dense, and almost every path of infinite lifetime is nowhere dense if considered only on finite parameter intervals.*

Let D be a parametrized neighbourhood on R. To prove the theorem, we show that almost every path of a Brownian motion process on R is nowhere dense on D, considering only parameter values $\leqslant c$, where c is a positive constant. According to the definition of a Brownian motion process, almost every path will meet the closure of D on a compact set, up to time c, even if the lifetime of the path is $\leqslant c$. Since (see Section 9) almost no path will meet any point of a specified denumer-

able dense subset of D, almost no path can be dense on D, up to time c.

In the following, we shall say that a sequence of points on a topological space converges to ∞ if only finitely many points of the sequence are in any compact subset of the space. A curve will be said to converge to ∞ if the corresponding condition is satisfied. Note that we have not defined — and do not wish to define — a point ∞.

The functions u_A and U_A (A closed) in the following theorems were defined in Section 9.

Theorem 13.2. *Let R be a Green space with a null boundary.*

(a) *The lifetime of every Brownian motion process on R is $+\infty$, with probability 1.*

(b) *Almost every path of each Brownian motion process on R is everywhere dense on R.*

(c) *$U_A = 1$ on R, whenever A has positive capacity.*

If R is of dimension 1, it must be the isometric image of either the infinite line or of a circle perimeter. Then (a) is trivial in this case. Moreover in this case each point has positive capacity, so that what (b) and (c) mean is simply that almost every path of every Brownian motion process through every point of R at arbitrarily large parameter values. This fact is trivially true. Thus in proving the theorem we can and shall assume that R has dimension at least 2.

Since R has a null boundary, it is connected, and the bounded superharmonic function u_A is identically constant. Since it is known [2] that $u_A(\xi) = 1$ if $\xi \in A$ but if ξ is not in an exceptional set of zero capacity, $u_A = 1$ whenever A has positive capacity. Now if ξ is any point of R, and if A is the closure of a small parametrized sphere with center not ξ, $u_A(\xi) = 1$, but the time it takes a Brownian path from ξ to meet A for the first time is large, with high probability (known if R is a Euclidean space and therefore true in general), so that (a) is true. We need not prove (b) separately, since (c) is obviously stronger. To prove (c) we need only remark that, since $u_A = 1$, almost every path of a Brownian motion process will reach A after any specified time.

Theorem 13.3. *Let R be a connected Green space, of dimension $\geqslant 2$, with a positive boundary.*

(a) *Almost every path of every Brownian motion process on R is nowhere dense and converges to ∞ as its parameter value approaches the path lifetime.*

(b) *If A is compact, $U_A = 0$.*

(c) *If A is compact, $u_A(\xi) < 1$ on at least one open component of $R \setminus A$ whose closure is not compact.*

In view of Theorem 13.1, the second part of (a) implies the first. Moreover the second part of (a) is obviously equivalent to (b). We shall therefore ignore the first part of (a) and treat (a) and (b) alike. We first show that, if A is compact, $U_A < 1$ on R. The function U_A is harmonic and $\leqslant 1$. Hence $U_A < 1$ unless the function is the constant function 1. In the latter case, let z be the first point at which a Brownian path from ξ meets A. Then, applying the results of Section 12

to the Green space $R \setminus A$, if v is any function bounded and subharmonic on R, and if $\xi \in R \setminus A$,

$$v(\xi) \leqslant \mathrm{E}\{v(z)\}.$$

This inequality implies that the maximum value of v on A is the maximum of v on R. Thus v, as a subharmonic function with a maximum at a point of R, must be a constant function, so that R must have a null boundary. Since R has a positive boundary, by hypothesis, $U_A < 1$.

To prove (a) and (b), it is sufficient to prove that, if A is the closure of a parametrized neighborhood, $U_A = 0$. The function u_A has the value 1 on A and is harmonic on $R \setminus A$. If $u_A = 1$ on R, an application of the continuation principle shows that $U_A = 1$ on R, and this we have seen is false. Hence $u_A < 1$ on $R \setminus A$. Let B be the boundary of a parametrized neighborhood concentric with A, and having a larger radius. Let $\delta = \max u_A(\xi)$ for ξ varying on B. Each time a path of a Brownian motion process meets B, it may go on to meet A, with probability $\leqslant \delta$, or may never meet A again, the choice being independent of the previous conduct of the path. Thus almost no path crosses from B to A infinitely often, and in fact the expected number of crossings is at most $\sum_1^\infty n\delta^n$. This means that almost every path of a Brownian motion process will be in $R \setminus A$, for sufficiently large parameter values, as was to be proved. To prove (c) we need only remark that, if A is compact we have already shown that u_A cannot be identically 1 on R, whereas if u_A is identically 1 on each component of $R \setminus A$ with a non-compact closure, then u_A is identically 1 on $R \setminus A$ and so on R.

Theorem 13.3 displays the true significance of Theorem 12.1 for subharmonic functions. If the Green space R on which the function is defined has a null boundary, and if the function is bounded from above by a positive harmonic function, the function must be a constant, so that Theorem 12.1 becomes trivial. If the space has a positive boundary, the theorem is no longer trivial, and it now states that a subharmonic function which is bounded from above by a positive harmonic function has a limit at ∞ along almost every path of any Brownian motion process on R. The situation for subparabolic functions on a heat space is even simpler. In the first place, every heat space has a positive boundary in the sense that there is a nonconstant bounded subparabolic function defined on it. In fact, if f is a numerically valued bounded nonincreasing function on $(-\infty, \infty)$, $u(t, \xi) = f(t)$ defines such a subparabolic function on the heat space. In the third place, we have the following theorem, which justifies for heat spaces our description of Theorem 12.1 as a boundary limit theorem.

Theorem 13.4. *Almost every path of a heat motion process on a heat space approaches ∞ as the parameter value approaches the path lifetime.*

Let the heat space $\hat{R}$ be an open subset of $R(\pm)$, so that a heat motion process on $\hat{R}$ is a curtailment of one of $R(\pm)$. The assertion of the theorem is trivial for paths with infinite lifetimes and for paths whose lifetimes have been shortened in the curtailing from $R(\pm)$ to $\hat{R}$.

The theorem is therefore true if R has a null boundary, because in that case almost every path on $\hat{R}$ will be in one of those two categories. If R has a positive boundary, however, the paths left to be treated almost all go to ∞ in view of Theorem 13.3 (a) for Brownian paths.

The following lemma and theorem will be useful below.

Lemma 13.5. *Let R be a Green space with a positive boundary, and let A, B be disjunct closed subsets of R, one of which is compact. Then the expected number of times a Brownian path from the point ξ crosses from B to A defines a bounded function of ξ.*

It is no restriction to suppose that A is compact, and we shall do so. This lemma was proved in the course of the proof of Theorem 13.3, under the restriction that A was the closure of a parameter neighborhood and B the boundary of a larger concentric neighborhood. The lemma is therefore true a fortiori with A so specified and B any closed set which does not have points in common with A, from which the assertion of the lemma follows.

Theorem 13.6. *If R is a Green space with a positive boundary, and if A is a compact subset of R, then the expected time that a Brownian path from ξ lies in A defines a bounded function of ξ.*

It is sufficient to consider, and we shall only consider, the case in which A is the closure of a parametrized sphere. Let A' be the boundary of A and let B be the boundary of a larger concentric neighborhood. Then a Brownian path from any point will only lie in A on going from A' to B, except for an initial arc from a point of the interior of A to B if the initial path point lies in this interior. If a is the maximum expected time it takes for a path from any point of A to reach B, it follows easily from the continuation principle that the total expected time in A is at most the product of a and an upper bound of the expected number of crossings from A' to B. The desired result now follows from Lemma 13.5.

14. The Dirichlet problem. In this section we shall write of Green spaces, harmonicity, and Brownian motion, but it is to be understood that the corresponding results for heat spaces, parabolicity, and heat motion are valid, and require only terminological changes in the discussion, except as mentioned explicitly during the discussion.

We shall suppose throughout this section that R is a Green space with a positive boundary. (In the corresponding discussion for heat spaces, no restriction is imposed on the space.) Without this restriction all the functions of interest below become constant functions.

In order to be able to discuss boundary points, we shall suppose that R is a subset of a compact metric space $R \cup R'$, where R' is a nowhere dense closed set in this union, disjunct from R, so that R' is the relative boundary of R. It will be seen below that this adjunction of a boundary is not needed in a probabilistic discussion of the Dirichlet problem. In particular, if R is itself an open subset, with compact closure, of a larger Green space, we can of course take R' as the relative boundary (we shall call this the imbedded case below) or as a ramified version of the relative boundary.

We remark, in elucidation of the preceding paragraphs, that, if R is a Green space with a positive boundary, and if R is metrized, the probability $\alpha(\xi)$ that a Brownian path from ξ satisfies the Cauchy condition for convergence is well defined. The function α is harmonic on R. Examples can be given in which $\alpha = 1$, in which $\alpha = 0$, and in which $0 < \alpha < 1$ on R, but if α is a constant function it can be shown that the constant must be 0 or 1. If R is completed, the points adjoined form its boundary, R', and $\alpha(\xi)$ becomes the probability that a Brownian path from ξ converges to a boundary point as the parameter approaches the path lifetime.

The most natural way to discuss the Dirichlet problem, in nonprobabilistic language at least, appears to be the Perron method, as extended by Wiener and Brelot, called the PWB method below. This method assigns to each boundary function f an upper PWB solution and a lower PWB solution, the functions being either identically $+\infty$, identically $-\infty$, or harmonic. (This description is slightly modified in treating the Dirichlet problem for parabolic functions.) If the upper and lower solutions are finite and identical, the harmonic function so obtained is called the PWB solution and f is called PWB resolutive. For further details, references, and the terminology used here, as well as the justification of the following outline, in a general framework, see [4]; for the results involving harmonic functions on Euclidean sets see [2]; for the results involving parabolic functions on Euclidean sets see [3]. If f is PWB resolutive, and if u is the corresponding PWB solution, then u has the boundary limit f along almost all Brownian paths to ∞ from a point of R in the following sense. Let some Brownian motion process from the point ξ of R be specified, and, for each ω, let $R(\omega)$ be the set of limit points of the ω path, as the path parameter approaches the path lifetime. Then $R(\omega)$ is a compact non-null subset of R', for almost all ω. The fact that f is PWB resolutive implies that, for almost all ω, f is necessarily constant on $R(\omega)$. We write this constant value $f[R(\omega)]$. Then u has $f[R(\omega)]$ as a limit along almost every ω path, and

$$u(\xi) = \mathbf{E}\{f[R(\omega)]\}. \tag{14.1}$$

If all continuous boundary functions are PWB resolutive, then almost all sets $R(\omega)$ contain exactly one point. The probability that $R(\omega)$ contains exactly one point is just the function α of the initial path point discussed at the beginning of this section.

In particular, in the imbedded case, $R(\omega)$ becomes the first point $z^*(\omega)$ in which the ω path from ξ meets the relative boundary of R, and the preceding formula becomes

$$u(\xi) = \mathbf{E}\{f(z^*)\}.$$

In this case it is known [1] that all continuous functions are resolutive.

Thus probability theory gives a simple interpretation of the PWB solutions. The class of PWB solutions depends on the topology considered, but the probability interpretation is always valid.

There is a class $\mathfrak{D}$ of harmonic functions on R, characterized in

probabilistic terms in the next paragraph, with the following property. The PWB solutions are members of the class $\mathscr{D}$, and, if a boundary R' is defined suitably, the class of PWB solutions is precisely $\mathscr{D}$.

The class $\mathscr{D}$ is characterized (see [3] and [4]) by a certain uniform integrability property of the harmonic function in question on the boundaries of a monotone sequence of open subsets of R with compact closures and union R. Every bounded harmonic function on R is a member of the class. This class can be characterized for our purposes as the class of harmonic functions u on R with the following property Let $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ be a Brownian motion process on R from ξ with lifetime τ. Then (a) for almost all ω, u has a finite limit $f^*_\xi(\omega)$ on the ω path of this process, and (b) if $x(t)$ is defined by

$$x(t, \omega) = \begin{cases} u[z(t, \omega)] & \text{if } t < \tau(\omega) \\ f^*_\xi(\omega) & \text{if } t \geqslant \tau(\omega), \end{cases}$$

then the process $\{x(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ is a martingale. In particular, this means that, generalizing (14.1),

$$u(\xi) = \mathbf{E}\{f^*_\xi(\omega)\}. \tag{14.2}$$

The properties (a) and (b) have nothing to do with the existence of a boundary R', however defined. Acting on this fact, instead of supposing that R has a boundary R', and attempting to find a harmonic function on R which in some sense has prescribed boundary limits on R', we can simply ask for a function u with the property (a) above, where f^*_ξ is prescribed for each ξ and Brownian motion process from ξ. It is shown that, if the prescribed boundary limits satisfy certain conditions, then there is a unique solution in $\mathscr{D}$, given by (14.2). The problem treated in this way is called stochastically ramified, so that $\mathscr{D}$ is the class of stochastically ramified Dirichlet solutions. The conditions on the prescribed boundary limits are, in outline, the following. For each ξ, f^*_ξ must be prescribed to depend only on the ω paths near the path lifetimes and to depend on ξ in such a way that, for any linear Borel set S, $\mathbf{P}\{f^*_\xi(\omega) \in S\}$ defines a harmonic function of ξ. For example, if A is a closed subset of R, it is legitimate to define $f^*_\xi(\omega)$ as 1 if the ω path from ξ meets A at parameter values arbitrarily near the path lifetimes, and as 0 for other values of ω. With this definition, (14.2) yields $u = U_A$, and it follows that U_A has the limit 1 on almost every ω path from ξ which meets A at times arbitrarily near the path lifetime, and limit 0 on almost every other path.

15. Two examples. Consider example in Section 5 of a Green space, consisting of the Riemann surface of the logarithm function, spread over the finite plane less one point. This space is conformally equivalent to the finite plane, and therefore has a null boundary. In spite of the infinite number of leaves, almost all paths of a Brownian motion proces on this space are dense, a tribute to the irregularity of Brownian motion in two dimensions.

Now consider the more complicated example of a Green space in Section 5, consisting of the Riemann surface of the elliptic modular function, spread over the finite plane less two points. This space R is conformally equivalent to the interior of a circle, R_1, and therefore has a positive boundary. Thus the multiplicity of leaves, and the way they are joined together, makes almost all paths of a Brownian motion process on this space nowhere dense, and convergent to ∞. It is interesting to analyze this example further. In terms of the conformal map just described, the Brownian motion processes on R become stochastic processes on R_1 which, although of infinite lifetime with probability 1, will be seen below to share many of the properties of Brownian motion processes on R_1, and Brownian motion processes on R_1 become stochastic processes on R which, although of finite lifetime with probability 1, share many of the properties of Brownian motion processes on R. Using the map from R_1 to R, if u is harmonic on R_1, and is bounded from above by a positive harmonic function, u has a finite limit along almost every path on R_1 which is the image of a path of a Brownian motion process on R. These image paths approach the boundary of R_1. If we put a metric on R by using the image of the natural R_1 metric, the relative boundary of R_1 becomes the image of the boundary of R obtained by completing R. Then the Dirichlet problems (PWB method) for these two spaces correspond exactly. Hence, if u_1 is the harmonic function on R_1 determined by the assignment of continuous boundary values, the image function u on R is the solution of the corresponding Dirichlet problem on R, and has the prescribed limit values on the boundary, both in terms of ordinary approach and in terms of approach along Brownian paths. Since the assigned boundary function is any continuous function, it can be chosen never to take the same value twice, and this then means that almost every Brownian trajectory on R, and so almost every image path on R_1, converges to a unique boundary point. Thus the image processes on R_1, which are definitely not Brownian motion processes, share many of the properties of these processes. Even the probability situation on R_1 is the image of that on R, including the martingale properties of harmonic and subharmonic functions on the probability paths.

A complete elucidation of this example depends on a systematic study of Brownian motion processes on a Riemann surface, a study which has never been made.

16. The boundary limits of u_A and related functions. Let the Green space R have a positive boundary, and let A be a closed subset of R. We have already proved in Section 14 that U_A has the limit 1 on almost every Brownian path to ∞ which meets A at times arbitrarily near the path lifetime, and the limit 0 on almost every other. We now show that u_A has this same limit character. To see this, consider u_A on $R \setminus A$. On this set, u_A is bounded and harmonic, and therefore has the boundary limit f^*_ξ along almost every Brownian path from the point ξ of $R \setminus A$ (to ∞ relative to $R \setminus A$), with

$$u_A(\xi) = \mathbf{E}\{f^*_\xi\},$$

according to Section 14. In fact, in the language of the Dirichlet problem, u_A is the stochastically ramified Dirichlet solution on $R \setminus A$ for the boundary limit along Brownian paths equal to 1 on paths to A and 0 for the others. This formulation identifies f^*_ξ, showing that, if $\xi \in R \setminus A$, u_A has the limit 1 along every path from ξ to A, the limit 0 along every path from ξ which never meets A, so that, since u_A is continuous as a function of the path parameter on almost every path of a Brownian motion process, u_A has the value 1 at the first point, if any, at which almost any path from ξ meets A. But if ξ is now arbitrary, the preceding result implies that, if $s > 0$, u_A has the limit 0 along almost every Brownian path from ξ, of lifetime $> s$ and which never meets A at time $> s$, whereas u_A has the value 1 on almost every other Brownian path from ξ at some parameter value $> s$. This statement implies the truth of the assertion about the boundary limits of u_A.

The results on the boundary limits of U_A and u_A are valid, with no essential change in proof, for the corresponding functions defined on heat spaces in terms of heat motion processes.

As a particular case, consider a Green space R, with corresponding stochastic transition function value $P(t, \xi, A)$. The value $P(t, \xi, A)$ is the probability that a heat path on $R(\pm)$ from the point (t, ξ), ever meets a point $(0, \eta)$ with $\eta \in A$. In other words, the results for u_A translated into this context can be used, and we find that $P(\cdot, \cdot, A)$ has the boundary limit 0 at ∞ along almost every path of any heat motion process on $R(\pm)$. That is, if $\{z(t),\ t \geqslant 0\}$ is a Brownian motion process on R, with lifetime τ and if s is any real number, then, for almost all ω,

$$\lim_{t \uparrow \tau(\omega)} P(s - t, z(t, \omega), A) = 0. \tag{16.1}$$

This equation is trivial unless $s > 0$ and $\tau(\omega) \leqslant s$. In particular it is trivial for almost all ω if R has a null boundary. On the other hand, a similar argument shows that, for almost all ω with $\tau(\omega) > s$,

$$\lim_{t \uparrow s} P(s - t, z(t, \omega), A) = \begin{cases} 1 \text{ if } z(s, \omega) \in A \\ 0 \text{ if } z(s, \omega) \in R \setminus A. \end{cases} \tag{16.2}$$

If $R(\pm)$ is replaced here by the most general heat space constructed on R, that is, by any open subset $\hat{R}$ of $R(\pm)$, then $P(t, \xi, A)$ in replaced by $P(s, t, \xi, A)$, as explained in Section 6. In this case the same argument yelds the fact that, if t is any real number, the function value $P(s, t, \xi, A)$ defines a super parabolic function of (s, ξ) on $\hat{R}$ with limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $\hat{R}$. The limit equation (16.2) is generalized in the obvious way.

17. The boundary limits of transition densities. The following further development of Lemma 13.5 will be useful.

Lemma 17.1. *Let* $\nu(\xi)$ *be the expectation in Lemma* 13.5. *Then* ν *is a superharmonic function on* R, *with limit* 0 *on almost every path to* ∞ *of every Brownian motion process on* R.

An application of the continuation principle shows that ν is superharmonic on R, harmonic on $R \setminus B$. Since ν is positive, there must be a

limit on almost every path to ∞ of every Brownian motion process on R. The limit is at most equal to the limit of u_B multiplied by the supremum of ν. Since it is no restriction in this lemma to assume that both sets A and B are compact, the theorem follows from our results on the limits of u_B along Brownian paths.

We now consider the density $p(t, \xi, \eta)$ determined by $P(t, \xi, A)$. For fixed η, p defines a positive superparabolic function on $R(\pm)$, and therefore has a limit on almost all heat paths to ∞ of every heat motion process on $R(\pm)$.

Theorem 17.2. *For each point η of R, the function $p(\cdot, \cdot, \eta)$ on $R(\pm)$ has the limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $R(\pm)$, that is using the notation of* (16.1),

$$\lim_{t \uparrow \tau} p(s - t, z(t, \omega), \eta) = 0 \tag{17.1}$$

with probability 1.

The assertion is trivially true for an ω path with $\tau(\omega) > s$. (For almost every such path, a less trivial result is that $\lim_{t \uparrow s} p(s-t, z(t, \omega), \omega) = 0$, which follows from the fact, proved in Section 10, that $\lim_{t \to 0} p(t, \xi, \eta) = 0$, uniformly for ξ and η restricted to disjunct compact sets). In treating the remaining ω paths, we can assume that R has a positive boundary, and we use the evaluation and notation of Section 10. We find that, if η is fixed in D_1, and if $\xi \in R \setminus (D_2 \cup S_2)$, $p(t, \xi, \eta)$ is at most the maximum value of $q(s, \zeta, \eta)$ as s varies on $[0, t]$ and ζ on S_1, multiplied by the expected number of times a Brownian path from ξ crosses from S_2 to S_1. According to Lemma 17.1, the latter expectation goes to 0 on almost every path to ∞ of every Brownian motion process on R, and hence $p(\cdot, \cdot, \eta)$ has the asserted behavior on heat paths.

More generally, if $R(\pm)$ is replaced by an arbitrary heat space $\hat{R}$, so that $p(t, \xi, \eta)$ is replaced by $p(s, t, \xi, \eta)$ as explained in Section 10, minor extension of the above argument shows that the function of (s, ξ) defined by $p(s, t, \xi, \eta)$ for fixed (t, η) has the limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $\hat{R}$. An alternative method is to express $p(s, t, \xi, \eta)$ as an integral average over the second and fourth arguments, using the fact that there is antiparabolicity in this pair, if not at (s, ξ), and thereby express $p(s, t, \xi, \eta)$ in terms of $P(s, t, \xi, A)$, thus reducing the desired result to that of the preceding section.

18. Proof of the symmetry of the transition density of a Green space. We can now prove that $p(t, \xi, \eta) = p(t, \eta, \xi)$ for all values of the arguments. This was done by Hunt in the Euclidean case [5], by different methods. Denote, for fixed $\eta = \eta_0$ the difference by Φ,

$$\Phi(t, \xi) = p(t, \eta_0, \xi) - p(t, \xi, \eta_0).$$

We have seen that the first term on the right defines a positive superparabolic function, which, according to Section 12, has a finite limit on almost every path to ∞ of every heat motion process from any point (t_0, ξ_0) of $\hat{R}$. Choosing such a process, denote the limit by x. We have seen in Section 17 that the second term on the right has the limit 0 on

almost every path to ∞ of the heat motion process from (t_0, ξ_0) and we have seen in Section 10 that this second term is bounded if ξ is not in some neighborhood of η_0 and if t is bounded from above. Finally, Φ is parabolic on $R(\pm)$, because the singularities at (t, η_0) cancel, and bounded from below if t is bounded from above. Hence, according to Section 12, and considering Φ only on the part of $R(\pm)$ with first coordinate less than $t_0 + 1$, we find that $\Phi(t_0, \xi_0) \geqslant \mathbf{E}\{x\}$, if $\zeta_0 \neq \eta_0$ so that

$$p(t_0, \eta_0, \xi_0) \geqslant p(t_0, \xi_0, \eta_0).$$

Since this inequality is valid for all values of the arguments, p is symmetric in its last two arguments.

19. The Green's function of a heat space. Let R be any Green space, and let $\hat{R}$ be any heat space based on R, that is, any nonempty open subset of $R(\pm)$. Let $p(t, \xi, \eta)$ be the Brownian motion transition density on R, and let $p(s, t, \xi, \eta)$ be the transition density of heat motion on $\hat{R}$.

Theorem 19.1. *The transition density $p(s, t, \xi, \eta)$ is uniquely characterized by the following properties.*

(a) *For fixed (t, η), $p(\cdot, t, \cdot, \eta)$ is superparabolic on $\hat{R}$, parabolic on $\hat{R} \setminus \{(t, \eta)\}$, bounded on every subset of $\hat{R}$ with first coordinate bounded from above, and containing no point of some neighborhood of (t, η).*

b) *The difference $p(s, t, \xi, \eta) - p_0(s - t, \xi, \eta)$, for fixed (t, η), defines a function of (s, ξ) which is parabolic in a neighborhood of (t, η).*

(c) *For fixed (t, η), $p(\cdot, t, \cdot, \eta)$ has the limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $\hat{R}$.*

We have already proved that p has the stated properties, aside from the boundedness condition in (a). This condition is satisfied because $p(s, t, \xi, \eta) \leqslant p(s - t, \xi, \eta)$, and just this boundedness condition was derived for the function on the right side of this inequality in Section 10. Conversely, if p' is a second function satisfying the stated conditions, the function $p - p'$, for fixed (t, η), defines a function of (s, ξ) which is parabolic on $\hat{R}$, is bounded on the part $\hat{R}_c$ of $\hat{R}$ with first coordinate less than the constant c, for any c, and has the limit 0 on almost every path of every heat motion process on $\hat{R}$. Considered on $\hat{R}_c$, for c large enough to make $\hat{R}_c$ not empty, this parabolic function, according to the results in Section 12, is the average of its limits on the paths of any heat motion process from the point in question. Since this average is 0, $p = p'$ on $\hat{R}_c$, for all c, and therefore on $\hat{R}$, as was to be proved.

In particular, if $\hat{R} = R(\pm)$, the phraseology of this theorem can be slightly simplified, as follows. *The transition density $p(t, \xi, \eta)$ is uniquely characterized by the following properties.*

(a) *For fixed η, $p(\cdot, \cdot, \eta)$ is superparabolic on $R(\pm)$, parabolic on $R(\pm) \setminus \{(0, \eta)\}$ bounded on every subset of $R(\pm)$ with first coordinate bounded from above and containing no point of some neighborhood of $(0, \eta)$.*

(b) *The difference $p(t, \xi, \eta) - p_0(t, \xi, \eta)$ defines, for fixed η, a function of (t, ξ) which is parabolic in a neighborhood of $(0, \eta)$.*

(c) *For fixed η, $p(\cdot, \cdot, \eta)$ has the limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $R(\pm)$.*

The connenction between the Green's function and the Dirichlet problem which is most simple is the following, a method which enables one, by solving a Dirichlet problem, to find the Green's function of any space if that for a larger space is known. Let $\hat{S}$ be an open nonempty subset of $\hat{R}$, and let $p(s, t, \xi, \eta)$ be the heat motion transition density corresponding to $\hat{R}$. Fix (t, η). Then, if $\hat{R}_c$ is as defined above, the function $p(\cdot, t, \cdot, \eta)$ is bounded superparabolic and positive on $\hat{S} \cap \hat{R}_c$, outside every neighborhood of (t, η). Let $u(s, t, \xi, \eta)$ be the value at (s, ξ) of the stochastically ramified Dirichlet solution on $\hat{S} \cap \hat{R}_c$ corresponding to the problem of finding a parabolic function on $\hat{S} \cap \hat{R}_c$ with the same limits along paths of heat motion processes as $p(\cdot, t, \cdot, \eta)$. When c increases, the domain of definition of u increases, but its values where defined do not depend on c. Thus u is now defined on $\hat{S}$ as a stochastically ramified Dirichlet solution. Define $p_1 = p - u$ on $\hat{S}$. Then it is trivial that p_1 has the properties listed in Theorem 19.1, so that p_1 is the probability density corresponding to heat motion processes on $\hat{S}$. It is this general method which simplifies this study in Euclidean spaces, since the definition of p for the whole space is given a priori. It is the ordinary Brownian motion transition density.

Let $\hat{R}$ be as above, and let (t_0, ξ) be a point of $\hat{R}$. Then by an antiheat motion process from (t_0, ξ) we mean a process $\{[t_0 + t, z(t)], t \geqslant 0\}$, where the $z(t)$ process is a Brownian motion process on R with initial point ξ, and where the lifetime of the process is the time a path first meets the boundary of $\hat{R}$, in $R(\pm)$, if ever, or the path lifetime of the Brownian motion process, whichever is smaller.

If (s, ξ) is fixed, $p(s, t, \xi, \eta)$ defines a positive antisuperparabolic function of (t, η) on $\hat{R}$. Hence, by the results of Section 12, $p(s, \cdot, \xi, \cdot)$ has a limit on almost every path to ∞ of every antiheat-motion process on $\hat{R}$. We shall now show that this limit is 0, that is, that for every triple s, ξ, t_0, with $(s, \xi) \in \hat{R}$ and $(t_0, \xi) \in \hat{R}$,

$$\lim_{t \uparrow \tau} p(s, t_0 + t, \xi, z(t, \omega)) = 0$$

for almost all ω. Here τ is the lifetime of the process. If $\hat{R} = R(\pm)$, this result reduces to Theorem 17.2, in view of the symmetry of $p(t, \xi, \eta)$ in the pair (ξ, η). To get the result in the general case, let $v(s, \cdot, \xi, \cdot)$ be the antiparabolic function on $\hat{R}$ with the same limits as $p(s, \cdot, \xi, \cdot)$ on paths to ∞ of every antiheat motion process on $\hat{R}$ (stochastically ramified Dirichlet solution). Then, according to Sections 12 and 14, $0 \leqslant v \leqslant p$, and, using the known theorems on convergence of sequences of parabolic functions, it follows that $v(\cdot, t, \cdot, \eta)$ is a parabolic function, for each point (t, η). The difference $p - v$ obviously satisfies the four conditions of Theorem 19.1. Hence $v = 0$ so that $p(s, \cdot, \xi, \cdot)$ has the limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $\hat{R}$, as was to be proved.

Theorem 19.1 has the obvious analogue, which we omit just because it is obvious, in which (s, ξ) is held fast instead of (t, η).

The justification of calling p the Green's function of R is clear. The potential theoretic implication will be briefly discussed in Section 21.

20. The Green's function of a Green space. Let R be any Green space, let A be a closed subset of R, and let $T(\xi, A)$ be the time a path of a Brownian motion process from ξ spends in A. If we define

$$G(\xi, A) = \mathbf{E}\{T(\xi, A)\} = \int_0^\infty P(t, \xi, A)\, dt, \tag{20.1}$$

an application of the continuation principle shows that $G(\cdot, A)$ is a superharmonic function on R, harmonic on $R \setminus A$. The probability that $T(\xi, A)$ has the value $+\infty$ defines a harmonic function of ξ on R, as can be seen by an application of the continuation principle. If R has a null boundary, this function must be a constant function, and it is easily seen that the constant in question must be 0 or 1. From now on in this section we shall suppose that R has a positive boundary. Then this function has the limit 1 on almost every path to ∞, of every Brownian motion process on R, which spends an infinite time in A, the limit 0 on almost every other path. In fact this harmonic function is the stochastically ramified Dirichlet solution on R corresponding to this prescribed boundary behavior.

If A is the closure of a parametrized neighborhood, $G(\xi, A)$ is (going back to the proof of Theorem 13.6) majorized by the product of a constant which may depend on A but not on ξ, multiplied by $\nu(\xi)$ the expectation treated in Lemmas 13.5 and 17.1. We draw two conclusions from this, for all compact sets A. In the first place, $G(\cdot, A)$ is a bounded function. In the second place this function has the limit 0 on almost every path to ∞ of every Brownian motion process on R.

Now consider the function g defined by

$$g(\xi, \eta) = \int_0^\infty p(t, \xi, \eta)\, dt. \tag{20.2}$$

With this definition,

$$G(\xi, A) = \int_A g(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Obviously g is symmetric, $0 \leqslant g \leqslant \infty$, and g is lower semicontinuous. Applying the results obtained for G, we find that $g(\xi, \cdot)$, for fixed ξ, is finite almost ewerywhere on R. In the Euclidean case Hunt [5] proved that, as so defined, g is the Green's function of R, and we shall extend this result to our case, necessarily using different methods.

Let ξ_0, η_0 be distinct points of R, and let A_a and B_a be parameter neighborhoods of ξ_0, η_0 respectively, with those points as centers, and of radius a. Then, if a and b are sufficiently small, using the fact that $G(\cdot, A)$ is harmonic on $R \setminus A$ we find that

$$\frac{1}{|A_a|\,|B_b|} \int_{A_a} d\xi \int_{B_b} g(\xi, \eta)\, d\eta = \begin{cases} \dfrac{1}{|A_a|}\, G(\eta_0, A_a) \\ \dfrac{1}{|B_b|}\, G(\xi_0, B_b). \end{cases} \tag{20.3}$$

Thus the ratios on the right do not depend on a, b if these radii are small. In other words, the spherical average of $g(\cdot, \eta_0)$ about ξ_0 is independent of the radius, if the radius is small. When $a \to 0$, in view of the lower semicontinuity of g, we find that the common ratios above are at least equal to $g(\xi_0, \eta_0)$. Thus g is finite-valued whenever its arguments are unequal, and, in fact, in view of the boundedness of $G(\cdot, A)$ when A is compact, $g(\cdot, \eta_0)$ is a bounded function outside each neighborhood of η_0.

We now show that $g(\cdot, \eta_0)$ is superharmonic on R, harmonic on $R \setminus \{\eta_0\}$. To show this we write $g(\xi, \eta_0)$ in the form

$$g(\xi, \eta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t+s, \xi, \eta_0)\, dt,$$

where s is any real number. This integral defines a lower semicontinuous function of (s, ξ). Since the integrant defines a superparabolic function of (s, ξ) on $R(\pm)$, if t as well as η_0 is fixed, it follows that $g(\cdot, \eta_0)$, considered as a function of (s, ξ), is superparabolic on $R(\pm)$. Since this function does not depend on s, $g(\cdot, \eta_0)$, considered as a function of ξ, is superharmonic on R. The function is harmonic on $R \setminus \{\eta_0\}$ because, as we have already proved, its spherical averages about points other than η_0 are independent of the sphere radius if this radius is small.

If D if a parametrized neighborhood on R, and if q is the Brownian motion transition density with state space D, we have seen that $p - q$ is continuous and positive for all t, ξ, η with ξ, η in D. If we now define g_1 by

$$g_1(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} q(t, \xi, \eta)\, dt,$$

then the preceding argument, when applied to $g - g_1$ instead of to g, yields the fact that $g(\cdot, \eta_0) - g_1(\cdot, \eta_0)$ is continuous and harmonic on D, if defined suitably at η_0. As so defined, for each point η_0, the difference $g - g_1$ is a positive function of (ξ, η) which becomes a harmonic function on D in either variable if the other is fixed. Such a function must be a continuous function of (ξ, η). (Apply the standard theorems on positive harmonic functions.) The function g_1 is not the most convenient one to display the singularity of g, because the definition depends on D. If $N \geqslant 3$, a better choice is given by

$$g_0(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} p_0(t, \xi, \eta)\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{2\sigma^2 \pi^{N/2}} |\xi - \eta|^{2-N}$$

where ξ, η are any points of R, contained in a common parametrized neighborhood. For $N = 2$, we can take g_0 as defined by

$$g_0(\xi, \eta) = -\frac{1}{\sigma^2 \pi} \log |\xi - \eta|,$$

obtained by approximating g_1. For $N = 1$, the only connected Green

space with a positive boundary, and this is the only type we need consider, is an open interval, which must be either finite or semiinfinite. For example, if R is the interval $(-\infty, 0)$, g can be calculated explicitly, yielding the classical Green's function

$$g(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}\eta & \text{if} \quad \xi \leqslant \eta, \\ \frac{2}{\sigma^2}\xi & \text{if} \quad \xi \geqslant \eta. \end{cases}$$

The case $N = 1$ is both simple and exceptional in that g has no discontinuity, and we omit it in the following discussion. As we have defined g_0, $g - g_0$ is continuous, aside from removable discontinuities, in the domain of g_0.

As a positive superharmonic function on R, $g(\cdot, \eta_0)$ has a limit on almost every path to ∞ of every Brownian motion process on R. To show that this limit is 0 with probability 1 we need only remark that, if ξ is not in the closure of B_b,

$$g(\xi, \eta_0) = G(\xi, B_b) / |B_b|,$$

and apply the fact that $G(\cdot, B_b)$ has the limit 0 in this sense, according to the discussion at the beginning of this section. (Since R has a positive boundary, almost no path of a Brownian motion process on R will meet B_b at parameter values near the path lifetime).

We summarize our results, with an added uniqueness property, in the following theorem.

Theorem 20.1. *If $N > 1$, the function g is uniquely characterized by the following properties, for all η on R.*

(a) *$g(\cdot, \eta)$ is a bounded function outside each neighborhood of η.*

(b) *$g(\cdot, \eta)$ is superharmonic on R, harmonic on $R \setminus \{\eta\}$.*

(c) *The difference $g(\cdot, \eta) - g_0(\cdot, \eta)$ is harmonic in a neighborhood of η if properly defined at that point.*

(d) *$g(\cdot, \eta)$ has the limit 0 on almost every path to ∞ of every Brownian motion process on R.*

The uniqueness proof follows that of Theorem 19.1, and is therefore omitted.

Just as in the heat space discussion in Section 19, the function g, which is the Green's function of R, can be obtained for any open subset of R by an application of the Dirichlet principle, if desired, instead of an application of the general method.

21. Potential theory. In view of the forthcoming exhaustive study of potential theory as derived from probability theory, by Hunt [6], we shall only make a few remarks on the subject here, to exhibit some of the significance of the work in previous sections. See [2] and specially [3] for further details and for proofs, in the Euclidean case. The proofs need no change to cover the general spaces treated in this paper.

If $\hat{\mu}$ is a mass distribution on a heat space $\hat{R}$, that is a positive

completely additive function of Borel sets, finite for compact sets, a potential can be defined by setting

$$\hat{u}(s, \xi) = \int_{\hat{R}} p(s, t, \xi, \eta)\, d\hat{\mu}_{t,\eta} \tag{21.1}$$

where p is the heat motion transition density on $\hat{R}$. If the function $\hat{u}$ is finite-valued on a dense set, then it is superparabolic on $\hat{R}$, and has limit 0 on almost every path to ∞ of every heat motion process on $\hat{R}$. Conversely a positive superparabolic function with this limit property is a potential if the limit is approached in a certain L_1 sense (see [3] for the precise statement.)

If μ is a mass distribution on a Green space R with a positive boundary, a potential can be defined by setting

$$u(\xi) = \int_{R} g(\xi, \eta)\, d\mu_\eta. \tag{21.2}$$

If u is finite at a single point, it is superharmonic on R, and has limit 0 on almost every path to ∞ of every Brownian motion process on R. There is a converse here similar to the one for heat potentials.

In particular, if $\hat{R} = R(\pm)$ above, (21.1) becomes

$$\hat{u}(s, \xi) = \int_{\hat{R}} p(s - t, \xi, \eta)\, d\hat{\mu}_{t,\eta}, \tag{21.1'}$$

and, if the measure $\hat{\mu}$ is invariant under translations of the t-axis, that is, if $\hat{\mu}$ is the product of a measure μ on R and Lebesgue measure on the t-axis, (21.1') becomes simply $u(\xi)$.

Thus the potential theory on the heat space $R(\pm)$ reduces to that on the Green space R if the mass distribution is chosen properly. In the same circle of ideas, if R is a Green space with a positive boundary, the Dirichlet problem on R can be thought of as a Dirichlet problem on $\hat{R} = R(\pm)$, and the results for heat spaces thus become not parallel results but simply a more inclusive theory. The key is the fact on the one hand heat motion processes on $R(\pm)$ project into Brownian motion processes on R, and on the other hand harmonic functions on R correspond to parabolic function on $\hat{R}$ which do not depend on the first coordinate.*

Поступила в редакцию
12. 11. 56

BIBLIOGRAPHY

[1] M. Brelot, G. Choquet, Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier Grenoble (1951), **3** (1952), 199—263.

[2] J. L. Doob, Semimartingales and subharmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **77** (1954), 86—121.

[3] J. L. Doob, A probability approach to the heat equation, Trans. Amer. Math. Soc., **80** (1955), 216—280.

* Note added in proof. Through an oversight our definition is not quite the usual one. What is usually called a Green space is what we call below a Green space with a positive boundary. Our Green spaces could more appropriately be called abstract Euclidean spaces.

[4] J. L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., Berkeley, 1955.
[5] G. A. Hunt, Some theorems concerning Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc., **81**, (1956), 294—319.
[6] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, I, Ill., Journal of Math., **1** (1957), 44—93.

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ГРИНА

ДЖ. Л. ДУБ (ЧИКАГО)

(*Резюме*)

Пространство R, локально изометричное открытой N-мерной сфере, называется пространством Грина размерности N. Броуновским движением в R мы называем марковский процесс в этом пространстве, являющийся локально броуновским N-мерным движением. Показано, что каждому значению параметра дисперсии однозначно соответствует вероятность перехода для процесса броуновского движения в R. Эта вероятность перехода из состояния ξ в состояние η_1 за время t имеет плотность $p(t, \xi, \eta)$. Показано, что при разумном выборе этой плотности и равенстве нулю при $t \leqslant 0$ функция p при фиксированном η_1 определяет гипер-параболическую функцию от (t, ξ), параболическую везде, кроме точки $(0, \eta)$, причем особенность в этой точке такая же, как у плотности вероятности перехода соответствующего N-мерного броуновского движения. Кроме того,

$$p(t, \xi, \eta) = p(t, \eta, \xi).$$

Пусть $R(\pm)$ есть прямое произведение R и прямой. Процесс теплового движения с исходной точкой (s, ξ) в $R(\pm)$ представляет собой процесс $\{[s - t, z(t)], t \geqslant 0\}$, где процесс $z(t)$ есть броуновское движение в R с исходной точкой ξ. Показано, что при любом η_1 функция $p(\cdot, \cdot, \eta_1)$ имеет предел, равный нулю, вдоль почти всех путей процесса теплового движения, начинающихся в любой точке $R(\pm)$. Эти пути выходят за пределы любого компактного подмножества $R(\pm)$ по мере увеличения своих параметров. (Верхняя граница значений параметра зависит от пути.) Функция перехода более сложного, а также несимметричного вида обладает аналогичными свойствами для любого непустого открытого подмножества в $R(\pm)$.

Указанные функции являются функциями Грина своих пространств. Функция $\int_0^\infty p(t, \cdot, \cdot)\, dt$ представляет собой функцию Грина на R в том случае, если R имеет положительную границу, т. е. если имеется непостоянная ограниченная субгармоническая функция в R. Последний результат для случая, когда R есть подмножество пространства Эвклида размерности N, был получен Хантом.

Задача Дирихле решается в вероятностных терминах как для параболических функций, определенных на открытых подмножествах в $R(\pm)$, так и для гармонических функций в R. Приводимое построение возможно и тогда, когда граница в рассматриваемом пространстве неопределена.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1957

О РАЗЛОЖЕНИИ КОМПОЗИЦИИ ЗАКОНОВ ГАУССА И ПУАССОНА

Ю. В. ЛИННИК

0. В настоящей работе излагается некоторое обобщение известных теорем Г. Крамера [1] и Д. А. Райкова [2] о разложениях нормального и Пуассонова законов.

Пусть $X_1 \in N(a, \sigma)$ — нормальная случайная величина с параметрами (a, σ), а X_2 подчиняется закону Пуассона. Под этим будем понимать, как обычно, что $\mathbf{P}(X_2 < x)$ имеет вид $F\left(\frac{x-\alpha}{\beta}; \lambda\right)$, где α—любое реальное число, $\beta > 0$, $\lambda \geqslant 0$ и

$$F(x; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad (x \geqslant 0).$$

Пусть X_2 стохастически не зависит от X_1; составим случайную величину

$$Y = X_1 + X_2. \tag{0.1}$$

Закон распределения Y будет композицией законов Гаусса и Пуассона.

Пусть имеем другое разложение Y на сумму двух независимых величин Y_1 и Y_2:

$$Y = Y_1 + Y_2. \tag{0.2}$$

Целью работы является доказательство теоремы:

Теорема. *Композиция законов Гаусса и Пуассона может быть разложена только на подобные же композиции.*

Точнее: пусть $\sigma > 0$ *и* $\lambda > 0$. *Для существования разложения вида* (0.2) *необходимо* (*и, тривиальным образом, достаточно*), *чтобы существовали разложения:*

$$Y_j = Y_{j1} + Y_{j2}, \tag{0.3}$$

где случайные величины Y_{jk} *независимы в совокупности, причем* Y_{j1} *нормальны,* Y_{j2} *Пуассоновы и*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}(Y_{11}) + \mathbf{D}(Y_{21}) &= \mathbf{D}(X_1) \\ \mathbf{D}(Y_{12}) + \mathbf{D}(Y_{22}) &= \mathbf{D}(X_2) \end{aligned}\right\}. \tag{0.4}$$

При использовании (0.4) теоремы Г. Крамера и Д. А. Райкова почти непосредственно следуют из этой теоремы. Однако доказательство теоремы весьма затруднительно в силу того, что здесь нельзя использовать основные факторы в доказательствах [1] и [2] — конечность порядка характе-

ристической функции (в дальнейшем — х. ф.) для нормального случая и решетчатость распределения — для Пуассонова случая. Х. ф. композиции законов Гаусса и Пуассона имеет, как целая функция комплексного переменного, бесконечный порядок, а соответствующее распределение не является решетчатым. Ввиду этого приходится применять довольно глубокие теоремы теории целых функций.

1. Обращаясь к разложениям (0.2), замечаем, что, не нарушая общности, можно считать х. ф. Y (t—реальная переменная):

$$f_0(t) = \exp(-\gamma t^2 + \lambda(e^{it} - 1)) \tag{1.1}$$

за счет линейного преобразования случайных величин Y. Y_1, Y_2 (см., напр., Б. В. Гнеденко [3]); $\gamma > 0$; $\lambda > 0$. Введя еще х. ф.

$$f_1(t) = \mathbf{E}\exp(itY_1); \quad f_2(t) = \mathbf{E}\exp(itY_2),$$

получим:

$$f_0(t) = f_1(t) f_2(t). \tag{1.2}$$

Из (1.1) видим, что $f_0(t)$ можно продолжить на плоскость комплексного переменного, где она будет целой функцией без нулей.

Лемма 1 (Д. А. Райков). *Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ могут быть продолжены на плоскость комплексных значений аргумента t и являются там целыми функциями. Равенство* (1.2) *выполняется на всей комплексной плоскости.*

Доказательство. Это следует, в силу свойств $f_0(t)$, из одной теоремы Д. А. Райкова ([4], стр. 98—99).

Положим теперь:

$$it = z; \quad t = -iz, \tag{1.3}$$

так что:

$$\varphi_j(z) = \mathbf{E}\exp(zY_j) \quad (j = 1, 2),$$

$$\varphi_0(z) = \mathbf{E}\exp(zY), \tag{1.4}$$

$$\varphi_0(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z). \tag{1.5}$$

Интегралы в (1.4) сходятся абсолютно и равномерно во всякой ограниченной области значений комплексного переменного z. Из (1.5) видим, что целые функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ не имеют нулей на комплексной плоскости, а из (1.4) видим, что они реальны на реальной оси (как и $\varphi_0(z)$). Из элементарной теории функций комплексного переменного следует, что существует целая функция $g(z)$ (одна из ветвей $\ln\varphi_1(z)$), реальная на реальной оси, такая, что:

$$\varphi_1(z) = \exp g(z). \tag{1.6}$$

2. Положим: $\varphi(z) = e^{\lambda}\varphi_0(z)$. Имеем из (1.5) $\varphi_2(z) = \varphi_0(z)\exp(-g(z))$, или:

$$e^{\lambda}\varphi_2(z) = \varphi(z)\exp(-g(z)), \tag{2.1}$$

или, в силу (1.4),

$$\varphi(z)\exp(-g(z)) = e^{\lambda}\mathbf{E}\exp(zY_2). \tag{2.2}$$

Далее, по (1.4):

$$\exp g(z) = \mathbf{E}\exp(zY_1). \tag{2.3}$$

Пусть Y_0— случайная величина, распределенная как Y и независимая от Y_1. Тогда имеем:

$$\varphi(z)\exp g(z) = e^{\lambda}\,\mathbf{E}\exp(z(Y_0+Y_1)). \tag{2.4}$$

Положим $z = x + iy$ (x, y реальны). В (2.2) и (2.4) используем хорошо известные свойства положительно определенных функций.

Лемма 2.

$$|\varphi(x+iy)\exp(\pm g(x+iy))| \leqslant \varphi(x)\exp(\pm g(x)), \tag{2.5}$$

где неравенство верно для любого знака и при всех реальных x и y.

Доказательство непосредственно видно из поведения правых частей (2.2) и (2.4).

Мы видим также, что правая часть (2.5) положительна на реальной оси.

3. Положим:

$$g(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{3.1}$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} g(z);\ v(x, y) = \operatorname{Im} g(z).$$

Далее имеем:

$$\varphi(z) = \exp(\gamma z^2 + \lambda e^z), \tag{3.2}$$

$$|\varphi(z)\exp(\pm g(z))| = \exp[\gamma(x^2 - y^2) + \lambda e^x \cos y \pm u(x, y)]. \tag{3.3}$$

Отсюда выводится одна из основных лемм:

Лемма 3.

$$|u(x, y) - u(x, 0)| \leqslant \gamma y^2 + 2\lambda e^x \sin^2\frac{y}{2}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Из (3.3) и (2.5) имеем:

$$\gamma(x^2 - y^2) + \lambda e^x \cos y + u(x, y) \leqslant \gamma x^2 + \lambda e^x + u(x, 0), \tag{3.5}$$

$$\gamma(x^2 - y^2) + \lambda e^x \cos y - u(x, y) \leqslant \gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0). \tag{3.6}$$

Из (3.5) находим:

$$u(x, y) - u(x, 0) \leqslant \gamma y^2 + 2\lambda e^x \sin^2\frac{y}{2}.$$

Из (3.6):

$$u(x, y) - u(x, 0) \geqslant -\gamma y^2 - 2\lambda e^x \sin^2\frac{y}{2}.$$

Полученные два неравенства равносильны (3.4).

Для дальнейшего весьма важен частный случай (3.4), когда $y = 2m\pi$ (m — любое целое число). В этом случае $\sin^2\frac{y}{2} = 0$, и мы имеем:

Лемма 4.

$$|u(x, 2m\pi) - u(x, 0)| \leqslant 4\gamma\pi^2 m^2 \tag{3.7}$$

для любых значений x и целых значений m.

4. Мы должны начать систематическое изучение $u(x, y)$; из лемм 3 и 4 видно, что нужно знать поведение $u(x, 0)$.

Лемма 5.

$$u(x, 0) = O(x^2 + e^x). \tag{4.1}$$

Доказательство. Обратимся к (2.2) и (2.4) и положим там $z = x$. Получим:

$$\exp(\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = e^{\lambda}\, \mathbf{E} \exp(xY_2), \tag{4.2}$$

$$\exp(\gamma x^2 + \lambda e^x + u(x, 0)) = e^{\lambda}\, \mathbf{E} \exp x(Y_0 + Y_2). \tag{4.4}$$

Введем в рассмотрение еще нормальную величину Z, для которой:

$$\mathbf{E} \exp(xZ) = \exp \gamma x^2 \tag{4.4}$$

и которая независима от Y_2. Умножая (4.4) на (4.2), найдем:

$$\exp(2\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = e^{\lambda}\, \mathbf{E} \exp x(Z + Y_2). \tag{4.5}$$

Рассмотрим случайные величины $Z + Y_2$ и $Y_0 + Y_2$. В каждую из них будет входить независимая от Y_2 Гауссова компонента с ненулевой дисперсией ($\gamma \neq 0$). Отсюда непосредственно следует существование двух пар положительных чисел A_{j1}, A_{j2} ($j = 1, 2$), таких, что

$$\mathbf{P}(A_{11} \leqslant Y_0 + Y_2 \leqslant A_{11} + 1) > 0, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P}(-A_{12} - 1 \leqslant Y_0 + Y_2 \leqslant -A_{12}) > 0, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{P}(A_{21} \leqslant Z + Y_2 \leqslant A_{21} + 1) > 0, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{P}(-A_{22} - 1 \leqslant Z + Y_2 \leqslant -A_{22}) > 0. \tag{4.9}$$

Вернемся к (4.1) и будем считать, что $x > 0$; нам нужно будет доказать, что:

$$u(x, 0) = O(e^x). \tag{4.10}$$

Пусть это неверно; тогда найдется последовательность $x_j \to \infty$ такая, что:

$$|u(x_j, 0)| > 3\lambda e^{x_j}. \tag{4.11}$$

Здесь $u(x_j, 0)$ может быть положительной или отрицательной. Допустим сначала, что для бесконечной подпоследовательности $\{t_j\}$; $t_j \to \infty$ чисел x_j, будет $u(t_j, 0) > 0$. Тогда, с помощью (4.11) найдем оценку левой части (4.5) для достаточно больших t_j:

$$\exp(2\gamma t_j^2 + \lambda e^{t_j} - u(t_j, 0)) < \exp(2\gamma t_j^2 - 2\lambda e^{t_j}) < \exp(-\lambda e^{t_j}). \tag{4.12}$$

Обращаясь к правой части (4.5), на основании (4.8) и (4.9) замечаем, что:

$$\mathbf{E} \exp t_j(Z + Y_2) > a_0 \exp a_1 t_j \tag{4.13}$$

(в дальнейшем a_i, c_i — положительные константы). При $t_j \to \infty$ получаем противоречие с (4.12). Приходится допустить, что при $j \geqslant j_0$, $u(x_j, 0) < 0$. Тогда обращаемся к (4.3) и находим, пользуясь (4.11):

$$\exp(\gamma x_j^2 + \lambda e^{x_j} + u(x_j, 0)) < \exp(-\lambda e^{x_j}), \tag{4.14}$$

но из (4.6) и (4.7) следует:

$$\mathbf{E} \exp x_j(Y_0 + Y_2) > a_0 \exp a_1 x_j, \tag{4.15}$$

что при $x_j \to \infty$ противоречит (4.14). Это доказывает (4.10).

Пусть теперь $x<0$. Остается доказать, что:

$$u(x, 0) = O(x^2 + 1). \tag{4.16}$$

Допустим, что (4.16) неверно и что существует последовательность $x_j \to \infty$ таких, что:

$$|u(-x_j, 0)| > 4\gamma x_j^2. \tag{4.17}$$

Сперва допустим, что для последовательности $t_j \to \infty$ чисел x_j будет $u(-t_j, 0) > 0$. Из (4.17) находим оценку для правой части (4.5):

$$\exp_4(2\gamma t_j^2 + \lambda e^{-t_j} - u(-t_j, 0)) < \exp(-\gamma t_j^2) \tag{4.18}$$

для достаточно больших t_j. Но из (4.9) следует, что

$$\mathbf{E} \exp(-t_j)(Z + Y_2) > a_0 \exp a_1 t_j, \tag{4.19}$$

что противоречит (4.18) при больших t_j. Приходится допустить, что $u(-x_j, 0) < 0$ при $j \geqslant j_0$. Тогда обращаемся к (4.3) и из (4.17) находим:

$$\exp(\gamma x_j^2 + \lambda e^{-x_j} + u(-x_j, 0)) < \exp(-\gamma x_j^2) \tag{4.20}$$

при $j \geqslant j_1$. Но (4.7) дает:

$$\mathbf{E} \exp(-x_j)(Y_0 + Y_2) > a_0 \exp a_1 x_j, \tag{4.21}$$

что противоречит (4.20) при больших x_j и доказывает (4.16).

Вместе с (4.10) это дает (4.1).

5. Лемма 6.

$$u(x, y) = O(x^2 + y^2 + e^x). \tag{5.1}$$

Доказательство. Из (3.4) находим:

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x, 0)| + \gamma y^2 + 2\lambda e^x \sin^2 \frac{y}{2}.$$

Используя (4.1), непосредственно приходим к (5.1).

Теперь нам нужно получить оценки для $v(x, y)$. Для этого мы используем интеграл Пуассона (см., напр., Р. Курант [5], стр. 96—97).

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$; рассматриваем окружность $|z - z_1| = R$; полагаем: $z = z_1 + Re^{i\varphi}$ на окружности и $z = z_1 + re^{i\psi}$ внутри нее; тогда

$$v(x, y) = v(x_1, y_1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\varphi, y_1 + R\sin\varphi) \frac{Rr\sin(\psi - \varphi)\, d\varphi}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}. \tag{5.2}$$

Лемма 7. *При* $x \leqslant 0$

$$v(x, y) = O(|z|^3 + 1). \tag{5.3}$$

При $x > 0$ *и любом* $\varepsilon > 0$

$$v(x, y) = O(\exp|z|(1 + \varepsilon)). \tag{5.4}$$

Доказательство. Сперва займемся (5.3) и рассмотрим решетку всех целых точек (ξ, η) с $\xi \leqslant 0$. Докажем, что:

$$v(\xi, 0) = O(|\xi|^3 + 1);\ \xi \leqslant 0. \tag{5.5}$$

В (5.2) полагаем: $y = 0$, $x = \xi + 1$; $x_1 = \xi$, $y_1 = 0$; $R = 4$, $r \leqslant 2$.

С помощью (5.1) находим:

$$|v(\xi-1, 0)| \leqslant |v(\xi, 0)| + a_2(\xi^2+1), \tag{5.6}$$

откуда

$$|v(\xi-1, 0)| \leqslant a_3 + a_2 \sum_{\nu=1}^{|\xi|+1} (\nu^2+1) \leqslant a_4(|\xi|^3+1), \tag{5.7}$$

что и доказывает (5.5). Пусть теперь задано целое $\xi \leqslant 0$; рассматриваем точки (ξ, η) с целыми $\eta > 0$. В (5.2) полагаем: $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$; $R = 4$; $r \leqslant 2$. С помощью (5.1) находим:

$$|v(\xi, \eta+1)| \leqslant |v(\xi, \eta)| + a_2(\xi^2+\eta^2+1), \tag{5.8}$$

откуда

$$|v(\xi, \eta+1)| \leqslant |v(\xi, 0)| + a_2\xi^2(\eta+1) + a_2 \sum_{\nu=1}^{\eta+1} (\nu^2+1). \tag{5.9}$$

Учитывая (5.5), получаем:

$$|v(\xi, \eta+1)| \leqslant a_3(|\xi|^3 + |\eta|^3 + 1). \tag{5.10}$$

Аналогично действуем при $\eta < 0$. Это доказывает (5.3) для целых точек (x, y) с $x \leqslant 0$. Пусть (x, y) с $x \leqslant 0$ — любая точка, а (ξ, η) — ближайшая к ней целая точка (или одна из таковых). В (5.2) возьмем: $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$, $R = 4$; $r \leqslant 2$. Используя (5.1), находим:

$$|v(x, y)| \leqslant |v(\xi, \eta)| + a_2(x^2+y^2+1).$$

Так как (5.3) доказано для целых точек, то этим оно доказано вообще.

Перейдем к (5.4). Пусть в (5.2): $z = x + iy = re^{i\psi}$, $R = r + \varepsilon$. Имеем:

$$v(x, y) = v(0, 0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) \frac{Rr\sin(\psi-\varphi)\,d\varphi}{R^2 - 2Rr\cos(\psi-\varphi) + r^2}. \tag{5.11}$$

Из (5.1) видим, что:

$$u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = O(e^{r(1+\varepsilon)}),$$

при этом (5.11) дает

$$v(x, y) = v(0, 0) + \frac{1}{\varepsilon^2} O(e^{r(1+\varepsilon)}). \tag{5.12}$$

Это и дает (5.4).

6. Объединяя (5.1), (5.3) и (5.4), получаем оценку $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которую сформулируем в виде леммы:

Лемма 8. *При* $x \leqslant 0$ *имеем:*

$$|g(z)| = O(|z|^3 + 1). \tag{6.1}$$

При $x > 0$ *и любом* $\varepsilon > 0$ *имеем:*

$$|g(z)| = O(\exp|z|(1+\varepsilon)). \tag{6.2}$$

Из леммы 8 следует, что $g(z)$ — функция экспоненциального типа $\tau \leqslant 1$. Несколько углубляя предыдущие рассуждения, мы могли бы показать, что либо $\tau = 1$, либо $g(z)$ есть квадратный полином. Но мы предпочтем другой путь. Составим две целые функции:

$$G_{\pm}(z) = \gamma z^2 + \lambda e^z \pm g(z). \tag{6.3}$$

Мы видим, что обе эти функции экспонентного типа $\tau \leqslant 1$. По крайней мере одна из них должна быть экспонентного типа $\tau = 1$. Будь это не так, функция:

$$G_+(z) + G_-(z) = 2\gamma z^2 + 2\lambda e^z$$

была бы экспонентного типа $\tau' < 1$, что невозможно. Из двух функций (6.3) выберем ту, которая имеет экспонентный тип $\tau = 1$, и обозначим ее $G(z)$. Имеем:

$$G(z) = \gamma z^2 + \lambda e^z + s_0 \cdot g(z), \tag{6.4}$$

где $s_0 = +1$ или -1.

Лемма 9. *При $x \leqslant 0$ имеем:*

$$|G(z)| < c_1(|z|^3 + 1). \tag{6.5}$$

При $x > 0$ и любом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$G(z) = O(\exp|z|(1+\varepsilon)). \tag{6.6}$$

Доказательство непосредственно следует из (6.4) и леммы 8. При всяком $\varepsilon < 0$, (6.6) уже неверно, так как $G(z)$ имеет экспонентный тип $\tau = 1$.

7. Основным орудием дальнейших выводов будет служить известная теорема Р. Палей — Н. Винера ([7], стр. 12—13).

Теорема Р. Палей — Н. Винера. *Следующие классы целых функций совпадают:*

(1) *Класс всех целых функций $F(z)$ с условием*

$$F(z) = O(e^{A|z|});\ A > 0,$$

принадлежащих L_2 на реальной оси, т. е. таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx < \infty;$$

(2) *класс всех целых функций, изобразимых в виде:*

$$F(z) = \int_{-A}^{A} e^{iuz} f(u)\, du,$$

где $f(u) \in L_2(-A, A)$, т. е. $f(u)$ — комплексная измеримая функция, суммируемая с квадратом по Лебегу. (В дальнейшем все интегралы будут пониматься в смысле Лебега).*

Выведем важную для дальнейшего лемму:

Лемма 10.

$$G(z) = z^4 \int_{-1}^{1} e^{zt}\Phi(t)\, dt + P(z), \tag{7.1}$$

где $\Phi(t) \in L_2(-1, 1)$ суммируема с квадратом по Лебегу и реальна, а $P(z)$ — полином не выше чем 3-й степени.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию:

$$H(z) = \frac{1}{z^4}\left(G(z) - G(0) - G'(0)\, z - \frac{G''(0)}{2} z^2 - \frac{G'''(0)}{6} z^3\right) \tag{7.2}$$

* Если экспонентный тип $F(z)$ точно равен τ, можно взять $A = \tau$ (см. [6]).

и рассмотрим $H(z)$. Ясно, что это — целая функция экспонентного типа $\tau = 1$. На мнимой оси $z = iy$, согласно (6.5) и (7.2), будем иметь:

$$H(iy) \in L_2(-\infty, \infty), \quad \text{т. е.} \int_{-\infty}^{\infty} |H(iy)|^2 dy < \infty.$$

Значит, $H(iz)$ будет принадлежать L_2 на реальной оси. Далее, она экспонентного типа $\tau = 1$. Отсюда по теореме Р. Палей — Н. Винера:

$$H(iz) = \int_{-1}^{1} e^{zu} f(u)\, du$$

при всех значениях iz; стало быть:

$$H(z) = \int_{-1}^{1} e^{zu} f(u)\, du, \tag{7.3}$$

где $f(u) \in L_2(-1, 1)$. Выражая $G(z)$ через $H(z)$ по формуле (8.2), получим:

$$G(z) = z^4 \int_{-1}^{1} e^{zu} f(u)\, du + P(z), \tag{7.4}$$

где $P(z)$ — полином степени $\leqslant 3$, появляющийся в числителе (7.2).

Остается доказать, что $f(u)$ можно выбрать реальной и что $P(z)$ имеет реальные коэффициенты. Последнее явствует из того, что $G(z)$ реальна на реальной оси. Полагая $z = x$, находим из (7.4):

$$G(x) = x^4 \int_{-1}^{1} e^{xt} f(t)\, dt + P(x). \tag{7.5}$$

Беря сопряженные, находим:

$$G(x) = x^4 \int_{-1}^{1} e^{xt} \overline{f(t)}\, dt + P(x). \tag{7.6}$$

Отсюда:

$$G(x) = x^4 \int_{-1}^{1} e^{xt} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}\, dt + P(x). \tag{7.7}$$

Обозначая $\Phi(t) = \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}$, приходим к (7.1), где $\Phi(t)$ реальна.

8. Для дальнейшего изучения свойств $\Phi(t)$ в (7.1) нам будет весьма полезна одна аналитическая лемма И. М. Виноградова. Она касается построения «гладких пиков» или «стаканчиков» (см. И. М. Виноградов [8], стр. 27, лемма 12).

Лемма («стаканчики И. М. Виноградова»). *Пусть r целое, $r > 0$; α, β вещественные;*

$$0 < \Delta < 0{,}5; \quad \Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta.$$

Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и с условиями:

1. $\psi(x) = 1$ *при* $x \in [\alpha + 0{,}5\Delta, \beta - 0{,}5\Delta]$;
2. $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ *при* $x \in [\alpha - 0{,}5\Delta, \alpha + 0{,}5\Delta]$ *и* $x \in [\beta - 0{,}5\Delta, \beta + 0{,}5\Delta]$;
3. $\psi(x) = 0$ *при* $x \in [0, 1]$; $x \in [\alpha - 0{,}5\Delta, \beta + 0{,}5\Delta]$;

4. $\psi(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*:

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 2\pi mx + b_m \sin 2\pi mx, \tag{8.1}$$

$$|a_m| \leqslant \frac{2}{\pi m}, \qquad |b_m| \leqslant \frac{2}{\pi m}, \qquad \text{если } m \leqslant \frac{1}{\Delta};$$

$$|a_m| \leqslant 2c\Delta, \qquad |b_m| \leqslant 2c\Delta, \qquad \text{если } m \leqslant \frac{1}{\Delta},\ \beta - \alpha \leqslant c\Delta;$$

$$|a_m| < \frac{2}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^r, \qquad |b_m| < \frac{2}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^r, \qquad \text{если } m > \frac{1}{\Delta}.$$

Несложное доказательство леммы И. М. Виноградова см. [8], стр. 27—29 (оно может быть еще упрощено применением аппарата сверток).

Нам будет важна еще оценка производных $\psi(x)$. Конструкция $\psi(x)$ по [8] (стр. 27—28) такова: берем $\psi_0(x)$, периодическую с периодом 1:

$$\psi_0(x) = 1 \quad \text{при } x \in (\alpha, \beta),$$
$$\psi_0(x) = \frac{1}{2} \quad \text{при } x = \alpha \text{ и } x = \beta,$$
$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{вне } [\alpha, \beta] \text{ на } [0, 1].$$

Далее, полагаем $\delta = \frac{\Delta}{2r}$ и при $\rho = 1, 2, \ldots, r$:

$$\psi_\rho(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \psi_{\rho-1}(x+z)\,dz = \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \psi_{\rho-1}(z)\,dz. \tag{8.2}$$

Тогда можем положить $\psi(x) = \psi_r(x)$. Пользуясь (8.2), найдем оценки для производных $\psi^{(\nu)}(x)$ при $\nu \leqslant r-1$. Имеем при $\rho \geqslant 2$:

$$\psi'_\rho(x) = \frac{1}{2\delta}[\psi_{\rho-1}(x+\delta) - \psi_{\rho-1}(x-\delta)]. \tag{8.3}$$

Так как для всех ρ, $0 \leqslant \psi_\rho(x) \leqslant 1$, то из (8.3) выводим:

Лемма 11. *При* $\nu \leqslant r-1$ *имеем*:

$$|\psi^{(\nu)}(x)| \leqslant C(r)\,\Delta^{-\nu}, \tag{8.4}$$

где $C(r)$ *зависит только от* r.

Запишем еще ряд (8.1) в комплексной форме:

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{2\pi i m\alpha}. \tag{8.5}$$

Тогда получим:

$$|\gamma_m| \leqslant 2(|a_m| + |b_m|). \tag{8.6}$$

9. Перейдем к изучению $\Phi(t)$ в (7.1). Если на сегменте $[a, b]$ две измеримые функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ совпадают почти везде, то будем, как обычно, называть их эквивалентными, и писать $\Phi_1(t) \approx \Phi_2(t)$. Мы применим лемму И. М. Виноградова для доказательства леммы:

Лемма 12. *В представлении* (7.1) *имеем*:

$$\Phi(t) \approx 0 \quad \textit{при } t \in [-1, 0], \tag{9.1}$$

так что можно написать:

$$G(z) - P(z) = z^4 \int_0^1 e^{zt} \Phi(t)\, dt. \tag{9.2}$$

Доказательство. Из (7.1) имеем:

$$H(z) = \frac{G(z) - P(z)}{z^4} = \int_{-1}^{1} e^{zt} \Phi(t)\, dt. \tag{9.3}$$

$H(z)$ — целая функция и из (6.5) найдем:

$$|H(x+iy)| < \frac{c_2}{|y|+1} \qquad \text{при } x \leqslant 0. \tag{9.4}$$

Будем рассматривать измеримую и суммируемую функцию $\Phi(t)$ на сегменте $S = [-1, 0]$. Точки $t_0 \in S$ называются точками Лебега $\Phi(t)$, если:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |\Phi(t) - \Phi(t_0)|\, dt = 0 \tag{9.5}$$

(см. И. П. Натансон, [9], стр. 224). Далее, для всякой суммируемой функции $\Phi(t)$ почти все точки $t_0 \in S$ будут точками Лебега ([9], стр. 224).

Далее мы будем употреблять рассуждения о сингулярных интегралах типа П. И. Романовского ([9], стр. 245), но для нас важны будут количественные оценки, так что нельзя будет прямо сослаться на П. И. Романовского.

Пусть $t_0 \in (-1, 0)$ — точка Лебега $\Phi(t)$ и пусть

$$\Phi(t_0) \neq 0. \tag{9.6}$$

Мы должны привести к противоречию (9.6).

Зададимся малым $\varepsilon > 0$ и выберем $h_0(t_0, \varepsilon)$ столь малым, что:

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |\Phi(t) - \Phi(t_0)|\, dt < \varepsilon, \tag{9.7}$$

если $0 < h \leqslant h_0(t_0)$. В лемме И. М. Виноградова положим $x = \frac{t}{2}$, так что получится функция $\varphi(t)$ с периодом 2.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} e^{xt} \Phi(t) \varphi(t)\, dt. \tag{9.8}$$

Будем считать $x < 0$; $|x|$ большим числом.

При заданном x будем строить $\varphi(t)$ в зависимости от точки t_0 и значения x, вводя таким образом в (9.8) ядро $\varphi(t) = W(t, t_0, x)$. В (9.7

выберем $h_0(t_0, \varepsilon)$ помимо нужного нам условия еще столь малым, что

$$h_0(t_0, \varepsilon) \leqslant \frac{1}{x^2}. \tag{9.9}$$

После этого в лемме И. М. Виноградова положим $r = 20$, $\Delta = \frac{h_0(t_0, \varepsilon)}{100}$, $\alpha = t_0 - 0{,}5\Delta$; $\beta = t_0 + h_0 - 0{,}5\Delta$ $(h_0 = h_0(t_0, \varepsilon))$. Имеем, согласно (9.7):

$$\left| \int_{-1}^{1} e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t)\, dt - \int_{-1}^{1} e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t_0)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} e^{xt} W(t, t_0, x) |\Phi(t) - \Phi(t_0)|\, dt < 4 e^{xt_0 \varepsilon} h_0, \tag{9.10}$$

ибо $t_0 < 0$ и $h_0 \leqslant \frac{1}{x^2}$.

Будем считать также h_0 столь малым, что интервал интегрирования не выходит из $(-1, 0)$. Далее, ввиду того, что

$$\int_{-1}^{1} W(t, t_0, x)\, dt = 2(\beta - \alpha),$$

имеем:

$$\left| \int_{-1}^{1} e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t_0)\, dt \right| > |\Phi(t_0)|\, h_0 e^{(t_0 + h)x} > \frac{1}{2} |\Phi(t_0)|\, e^{xt_0} h_0 \tag{9.11}$$

в силу того, что $e^{xh_0} = 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

В сочетании с (9.10) это приводит нас к важному выводу, что при

$$h_0 \leqslant \min\left(h_1(t_0), \frac{1}{x^2}\right), \tag{9.12}$$

где $h_1(t_0)$ зависит только от t_0, получим:

$$\left| \int_{-1}^{1} e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t)\, dt \right| > \frac{h_0}{4} |\Phi(t_0)|\, e^{xt_0}. \tag{9.13}$$

Теперь рассмотрим разложение:

$$W(t, t_0, x) = \beta - \alpha + \sum_{m}{}' \gamma_m e^{\pi m t i}, \tag{9.14}$$

где все коэффициенты будут зависеть от t_0 и x. Согласно лемме И. М. Виноградова, выбору $r = 20$ и (8.6), имеем

$$|\gamma_m| \leqslant c_3 h_0^{-20} |m|^{-21}. \tag{9.15}$$

Имеем, далее:

$$\int_{-1}^{1} e^{xt} \gamma_m e^{\pi m t i} \Phi(t)\, dt = \gamma_m \int_{-1}^{1} \exp\left((x + m\pi i) t\right) \Phi(t)\, dt = \gamma_m H(x + m\pi i).$$

В силу (9.4), ввиду того, что $x \leqslant 0$, имеем:

$$|\gamma_m H(x + m\pi i)| \leqslant \frac{|\gamma_m| c_2}{|m\pi| + 1}. \tag{9.16}$$

Далее, согласно (8.6) и оценкам леммы И. М. Виноградова (п. 8), $|\gamma_m| \leqslant \frac{8}{|\pi m|}$ при $1 \leqslant |m| \leqslant \frac{1}{\Delta} = \frac{100}{h_0}$. При $|m| > \frac{1}{\Delta}$ имеем:

$$|\gamma_m| < c_4 h_0^{-20} |m|^{-20},$$

и при $m = 0$ получается член $(\beta - \alpha) H(x) = 0(1)$ при $x \leqslant 0$.

Собирая эти оценки, находим:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H(x + m\pi i) \right| < c_3 + c_4 h_0^{-20}. \tag{9.17}$$

Далее, ряд (9.14) сходится абсолютно и равномерно. Стандартными приемами убеждаемся в законности почленного интегрирования ряда (9.14) в (9.13). Имеем:

$$\int_{-1}^{1} e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t)\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H(x + m\pi i). \tag{9.18}$$

Подставляя в (9.13) и используя (9.17), находим:

$$c_3 + c_4 h_0^{-20} > \frac{h_0}{4} |\Phi(t_0)|\, e^{xt_0},$$

или

$$|\Phi(t_0)| < c_5 h_0^{-21} e^{-xt_0}. \tag{9.19}$$

Выберем x столь большим, что согласно (9.12)

$$h_0 = \frac{1}{x^2}. \tag{9.20}$$

Тогда (9.19) дает:

$$|\Phi(t_0)| < c_5 x^{42} e^{-|xt_0|}. \tag{9.21}$$

При этом $t_0 \neq 0$, ибо $t_0 \in (-1, 0)$. При $x \to \infty$ получаем $\Phi(t_0) = 0$, что противоречит (9.6). Итак, во всех точках Лебега $\Phi(t)$ при $t \in (-1, 0)$, т. е. почти везде, $\Phi(t) = 0$. Значит, $\Phi(t) \approx 0$, и лемма 12 доказана.

10. Обозначим $G(z) - P(z) = G_0(z)$. Имеем:

$$G_0(z) = z^4 \int_0^1 e^{zt} \Phi(t)\, dt. \tag{10.1}$$

Положим $G_0(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y)$; в силу реальности $\Phi(t)$ найдем из (10.1) непосредственным подсчетом:

$$u_0(x, y) = \int_0^1 e^{xt} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \cos yt \Phi(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^1 e^{xt} (-4x^3y + 4xy^3 + y^4) \sin yt \Phi(t)\, dt. \tag{10.2}$$

Пусть $\{\gamma_m\}$ $(m = 0, 1, 2 \ldots)$ набор реальных чисел под условием:

$$|\gamma_m| < \frac{A_1(x)}{(m+1)^{20}}. \tag{10.3}$$

Составим четный ряд Фурье:

$$\Lambda(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t. \tag{10.4}$$

В правой части (10.2), при заданном x, будем полагать $y = m$ ($m = 0, 1, 2$), умножать на γ_m и складывать; в силу (10.3) законно это делать под знаком интеграла в (10.2).

Полученный результат обозначим $F(\Lambda, u_0)$. Ввиду (10.3), при заданном x, ряд (10.4) можно не менее 18 раз дифференцировать по t. Простой подсчет дает:

$$F(\Lambda, u_0) = \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x))\,\Phi(t)\,dt. \tag{10.5}$$

Далее, формально имеем

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m). \tag{10.6}$$

Покажем, что ряд (10.6) будет абсолютно сходящимся.

Лемма 13. *При целых m и $x > 0$*

$$|u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leqslant (12|\alpha_0|x + 4|\alpha_1| + 4\gamma)\pi^2 m^2, \tag{10.7}$$

если $P(z)$ в (9.2) имеет вид:

$$P(z) = \alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3. \tag{10.8}$$

Доказательство. Имеем:

$$G_0(z) = G(z) - P(z) = \gamma z^2 - P(z) + \lambda e^z + s_0 y(z), \tag{10.9}$$

где $s_0 = +1$ или -1. Согласно лемме 4 (3.7) имеем для $u(x, y) = \operatorname{Re} g(z)$

$$|u(x, 2\pi m) - u(x, 0)| \leqslant 4\gamma\pi^2 m^2. \tag{10.10}$$

Полагая $u_1(x, y) = \operatorname{Re}(\gamma z^2 - P(z) + \lambda e^z)$, найдем:

$$u_1(x, y) = -\alpha_0(x^3 - 3xy^2) - \alpha_1(x^2 - y^2) - \alpha_2 x - \alpha_3 + \lambda e^x \cos y. \tag{10.11}$$

Ввиду этого, для целых m

$$|u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0)| \leqslant 12|\alpha_0|x\pi m^2 + 4|\alpha_1|\pi^2 m^2, \tag{10.12}$$

что вместе с (10.10) дает (10.7).

Таким образом, для ряда (10.6) имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m) = u_0(x, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m + F_1(\Lambda, u_0), \tag{10.13}$$

$$F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m [u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)] \tag{10.14}$$

и

$$|F_1(\Lambda, u_0)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m|\,|u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leqslant$$

$$\leqslant c_6 x A_1(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{(m+1)^{20}} < c_7 x A_1(x). \tag{10.15}$$

Эта оценка ряда (10.6) будет нужна в дальнейшем.

11. Вернемся к основной формуле (10.5). Если бы $\Phi(t)$ была четырежды дифференцируемой функцией t, то было бы выгодно употреблять в (10.5)

интегрирование по частям. Но в общем случае $\Phi(t)$ лишь измерима и суммируема с квадратом, и приходится избирать обходные пути.

Пусть $U(t, x)$ непрерывная при каждом $x > 0$ функция t, заданная при $t \in [0, 1]$. Частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Gamma(t, x)) = e^{xt}U(t, x) \tag{11.1}$$

будет, как нетрудно проверить,

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{6}\int_0^t e^{x(v-t)}(t-v)^3 U(v, x)\,dv. \tag{11.2}$$

Пусть $h > 0$ любое число, такое, что $t + 4h$ и t лежат в сегменте $0, 1]$. Составим четвертую разность $\Phi(t)$:

$$\Delta^4\Phi(t) = \Phi(t+4h) - 4\Phi(t+3h) + 6\Phi(t+2h) - 4\Phi(t+h) + \Phi(t). \tag{11.3}$$

Целью всех дальнейших рассуждений является доказательство соотношения

$$\Delta^4\Phi(t) = 0 \tag{11.4}$$

почти для всех t при данном h. Это, однако, потребует вспомогательных рассуждений.

Имеем из (11.2) $\Gamma(0, x) = 0$. Для дальнейшего важно также поведение

$$\Gamma(1, x) = \frac{1}{6}\int_0^1 e^{x(v-1)}(1-v)^3 U(v, x)\,dv =$$

$$= \frac{1}{6}\,e^{-x}\int_0^1 e^{xv}(1-v)^3 U(v, x)\,dv. \tag{11.5}$$

Пусть $W(\xi)$ — непрерывная функция ξ, причем $W(\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant \xi_0$ $\left(\xi_0 \leqslant \frac{h}{100}\right)$; пусть $t_0 \in (0, 1)$ таково, что при $j = 0, 1, \ldots, 4$

$$[t_0 + jh - \xi_0,\quad t_0 + jh + \xi_0] \subset (0, 1). \tag{11.6}$$

Соответственно (11.3) построим функцию

$$U(v, x, t_0) = W(v - t_0 - 4h) - 4e^{xh}W(v - t_0 - 3h) +$$

$$+ 6e^{2xh}W(v - t_0 - 2h) - 4e^{3xh}W(v - t_0 - h) + e^{4xh}W(v - t_0). \tag{11.7}$$

Лемма 14. *При выборе* $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ *в* (11.2), *имеем*:

$$\Gamma(1, x) = 0. \tag{11.8}$$

Доказательство. В силу (11.5) надлежит доказать, что

$$\int_0^1 e^{xv}(1-v)^3 U(v, x, t_0)\, dv = 0. \tag{11.9}$$

Имеем при целых $j \geqslant 0$:

$$\int_0^1 e^{xv}(1-v)^3 W(v - t_0 - jh)\, dv =$$

$$= \exp x(t_0 + jh) \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{x\xi}(1 - t_0 - jh - \xi) W(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда, используя (11.7), находим:

$$\int_0^1 e^{xv}(1-v)^3 U(v, x, t_0)\, dv = \exp(t_0 + 4h)x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{x\xi} W(\xi) \times$$
$$\times [(1 - t_0 - 4h - \xi)^3 - 4(1 - t_0 - 3h - \xi)^3 +$$
$$+ 6(1 - t_0 - 2h - \xi)^3 - 4(1 - t_0 - h - \xi)^3 + (1 - t_0 - \xi)^3]\, d\xi = 0,$$

что и доказывает лемму.

12. Впредь будем рассматривать $\Gamma(t, x)$, задаваемые формулой (11.2), где $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ задается (11.7). Тогда будем иметь:

$$\Gamma(0, x) = \Gamma(1, x) = 0 \tag{12.1}$$

при всех $x > 0$.

Пусть t_0, h и ξ_0 таковы, что:

$$t_0 \pm (4h + \xi_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \tag{12.2}$$

$\left(\text{так что } t_0 > \frac{1}{2}\right)$. Построим по данному t_0 функцию $U(v, x, t_0)$[см. (11.7)]. Мы видим, что

$$U(v, x, t_0) = 0 \quad \text{при } v \leqslant \frac{1}{2}, \tag{12.3}$$

так что, согласно (11.2),

$$\Gamma(t, x) = 0 \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{12.4}$$

Введем теперь функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) + \Gamma(1 - t, x). \tag{12.5}$$

Это — четная функция t при каждом x. Далее, в силу (12.1),

$$\Lambda(0, x) = \Lambda(1, x) = 0 \tag{12.6}$$

при всех $x > 0$.

Рассмотрим подробнее поведение $\Lambda(t, x)$ при заданном $x > 0$ и $t \in [0, 1]$. Имеем, согласно (12.4),

$$\Gamma(1 - t, x) = 0 \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{12.7}$$

Отсюда, по определению $\Lambda(t, x)$ (12.5):

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(1-t, x) \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{12.8}$$

Рассмотрим действие оператора $\frac{\partial^4}{\partial t^4}$ на функцию $e^{xt}\Lambda(t, x)$. Из (12.8) и (11.1) имеем

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0) \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{12.9}$$

Далее, из (11.2):

$$\Gamma(1-t, x) = \frac{1}{6}\int_0^{1-t} e^{x(v-1+t)}(1-t-v)^3 U(v, x, t_0)\,dv =$$

$$= \frac{1}{6}e^{x(t-1)}\int_0^{1-t} e^{xv}(1-t-v)^3 U(v, x, t_0)\,dv. \tag{12.10}$$

Таким образом, при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, в силу (12.8),

$$e^{xt}\Lambda(t, x) = \frac{1}{6}e^{x(2t-1)}\int_0^{1-t} e^{xv}(1-t-v)^3 U(v, x, t_0)\,dv. \tag{12.11}$$

13. Нам нужно получить оценку для $\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x))$ при $t_0 \pm (4h+\xi_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. При определении $U(v, x, t_0)$ в (11.7) будем считать $W(\xi)$ заданной в виде «стаканчика И. М. Виноградова» (см. п. 8), так что

$$0 \leqslant W(\xi) \leqslant 1,\ W(\xi) = 0;\ |\xi| \geqslant \xi_0. \tag{13.1}$$

Применяя оператор $\frac{\partial^4}{\partial t^4}$ к (12.11), видим, что результат состоит из ограниченного числа членов вида:

$$ae^{x(2t-1)}x^\nu \int_0^{1-t} e^{xv}(1-t-v)^\mu U(v, x, t_0)\,dv \tag{13.2}$$

или

$$a'e^{x(2t-1)}\cdot x^\nu e^{x(1-t)}U(1-t, x, t_0), \tag{13.3}$$

где a, a' константы, $0 \leqslant \nu \leqslant 4$; $0 \leqslant \mu \leqslant 3$.

Лемма 15. *При* $x \geqslant 1$, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $t_0 \pm (4h+\xi_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\left|\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x))\right| \leqslant c_8 x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0)x. \tag{13.4}$$

Доказательство. Из (11.7) видим, что $U(v, x, t_0) = 0$ при v, не принадлежащем системе сегментов:

$$[t_0 + jh - \xi_0,\ t_0 + jh + \xi_0];\quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Учитывая это, получаем для (13.3) оценку:

$$|a'x^\nu e^{xt}U(1-t, x, t_0)| \leqslant |a'|x^4 \max_{0 \leqslant j \leqslant 4} \exp x(1 - t_0 - jh + \xi_0 + 4h) \leqslant$$

$$\leqslant c_9 x^4 \exp x(1 - t_0 + 4h + \xi_0) \tag{13.5}$$

Теперь обращаемся к (13.2). Ввиду свойств $U(v, x, t_0)$, при $1-t<t_0-\xi_0$ $t>1-t_0+\xi_0$), интеграл в (13.2) равен 0, так что для (13.2) получим оценку (см. (11.7)):

$$|a|x^4 \exp[2(1-t_0+\xi_0)-1]\exp x(1-t_0+\xi_0)\exp 4xh = \\ = |a|x^4 \exp x(2-3t_0+4h+3\xi_0). \tag{13.6}$$

Но $2-3t_0<1-t_0$, так как $t_0>\frac{1}{2}$, так что оценки (13.5) и (13.6) можно объединить в (13.4), и лемма доказана.

14. Конкретизируем теперь выбор «стаканчика И. М. Виноградова» $W(\xi)$. Будем считать, при заданном t_0, $\xi_0=\xi_0(t_0, x)$ заданной функцией x; в лемме И. М. Виноградова возьмем $r=20$; $\Delta=\frac{\xi_0}{100}$; $\alpha=0{,}5\Delta$; $\beta=\xi_0-0{,}5\Delta$. Согласно лемме 11 (8.4), получим при $\nu\leqslant 18$

$$|W^{(\nu)}(\xi)|\leqslant c_9\xi_0^{-18}. \tag{14.1}$$

При заданном t_0, ξ зависит от x.

Полагая

$$\xi_0^{-18}=A_0(x), \tag{14.2}$$

найдем:

$$|W^{(\nu)}(\xi)|\leqslant c_9A_0(x). \tag{14.3}$$

Нам надо получить оценку для коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $\Gamma(t, x)$.

Лемма 16.

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\Gamma(t, x)\right|<c_{10}x^{18}A_0(x)e^{4xh} \tag{14.4}$$

при $0\leqslant\nu\leqslant 18$.

Доказательство. Согласно (11.2):

$$\Gamma(t, x)=\frac{1}{6}\int_0^\infty e^{x(v-t)}(t-v)^3U(v, x, t_0)dv.$$

Имеем: $\Gamma(t, x)=\Gamma(1, x)$ при $t>t_0+4h+\xi_0$, ибо $U(v, x, t_0)=0$ при $v\geqslant t_0+4h+\xi_0$. Далее, $\Gamma(t, x)=\Gamma(0, x)$ при $t<t_0-\xi_0$, ибо $U(v, x, t_0)=0$ при $v<t_0-\xi_0$.

Далее, $\Gamma(1, x)=0$ (11.8). Отсюда следует, что $\Gamma^{(\nu)}(0, x)=\Gamma^{(\nu)}(1, x)=0$ для всех целых ν. Далее, из (11.2), непосредственно дифференцируя и оценивая слагаемые, находим при $0\leqslant\nu\leqslant 18$, в силу (14.3):

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\Gamma(t, x)\right|\leqslant c_{10}x^{18}\cdot A_0(x)e^{4xh},$$

что совпадает с (14.4).

Лемма 17. *При разложении в ряд Фурье:*

$$\Gamma(t, x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos 2\pi mt+b_m\sin 2\pi mt \tag{14.5}$$

имеем оценки:

$$|a_m|+|b_m|<\frac{c_{11}x^{18}A_0(x)e^{4xh}}{(m+1)^{16}}. \tag{14.6}$$

Доказательство. При $t=0$ и $t=1$, $\Gamma^{(\nu)}(t, x)=0$ для всех целых $\nu \geqslant 0$. При $0 \leqslant \nu \leqslant 18$ и $t \in [0, 1]$ имеем оценку (14.4). На основании этого, (14.6) следует из известных теорем теории рядов Фурье (см., напр., Г. М. Фихтенгольц [10], т. III, 605—606).

15. На основании оценок, найденных в п. **14** для коэффициентов Фурье вспомогательной функции

$$\Gamma(t, x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos 2\pi m t + b_m \sin 2\pi m t,$$

легко найдем такие же оценки для основной функции:

$$\Lambda(t, x)=\Gamma(t, x)+\Gamma(1-t, x)=\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t. \tag{15.1}$$

Очевидно, $\gamma_m = 2a_m$, и из (14.6) находим:

$$|\gamma_m| < \frac{c_{12} x^{18} A_0(x) e^{4xh}}{(m+1)^{16}}. \tag{15.2}$$

Далее, весьма важно отметить, что в силу

$$\Lambda(0, x)=\Lambda(1, x)=0 \tag{15.3}$$

имеем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m = \frac{\Lambda(0, x)+\Lambda(1, x)}{2}=0. \tag{15.4}$$

Вернемся к формулам (10.5) и (10,6):

$$F(\Lambda, u_0)=\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m)=\int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(e^{xt}\Lambda(t, x)\right) \Phi(t)\, dt. \tag{15.5}$$

Лемма 18.

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{13} x^{19} A_0(x) e^{4xh} \qquad \textit{при } x \geqslant 1. \tag{15.6}$$

Доказательство. В силу (15.4) находим:

$$F(\Lambda, u)=\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m)=\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \left(u_0(x, 2\pi m)-u_0(x, 0)\right), \tag{15.7}$$

откуда, по лемме 13 (10.7) и (15.2),

$$|F(\Lambda, u_0)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m|\,|u_0(x, 2\pi m)-u_0(x, 0)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{12} x^{18} A_0(x) e^{4xh}}{(m+1)^{16}} c_{14} x m^2 < c_{13} x^{19} A_0(x) e^{4xh}$$

при $x \geqslant 1$, что и доказывает (15.6).

16. Обозначим $J_{1/2}=\int_0^{1/2} \frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(e^{xt}\Lambda(t, x)\right) \Phi(t)\, dt;$

$$J_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(e^{xt}\Lambda(t, x)\right) \Phi(t)\, dt.$$

Из (15.5) находим

$$F(\Lambda, u_0)=J_{1/2}+J_1.$$

По лемме 15 (13.4) имеем:

$$|J_{1/2}| \leqslant c_8 x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0)\, x \int_0^{1/2} |\Phi(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{15} x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0)\, x. \tag{16.1}$$

Теперь обращаемся к J_1. В силу (12.9):

$$J_1 = \int_{1/2}^{1} e^{xv} U(v, x, t_0)\, \Phi(v)\, dv. \tag{16.2}$$

Функция $U(v, x, t_0)$ выражается формулой (11.7). Имеем ($0 \leqslant j \leqslant 4$):

$$\int_{1/2}^{1} e^{(4-j)xh} W(v - t_0 - jh)\, e^{xv} \Phi(v)\, dv = \int_{v=t_0+jh-\xi_0}^{t_0+jh+\xi_0} \exp x(v + (4-j)h) \times \tag{16.3}$$

$$\times W(v - t_0 - jh)\, \Phi(v)\, dv = \exp(t_0 + 4h)\, x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi)\, \Phi(t_0 + jh + \xi)\, d\xi.$$

В силу (11.7), имеем из (16.3):

$$J_1 = e^{(t_0+4h)x} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi)\, F(t_0 + \xi)\, d\xi, \tag{16.4}$$

где

$$F(t_0 + \xi) = \Delta^4 \Phi(t_0 + \xi) \tag{16.5}$$

при заданном значении h (см. (11.3)).

Пока мы не накладывали на t_0 никаких условий помимо: $t_0 \pm \pm (4h + \xi_0) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Сейчас мы наложим дополнительные условия. Рассмотрим при заданном h измеримую функцию τ

$$F(\tau) = \Delta^4 \Phi(\tau) \tag{16.6}$$

в сегменте $\tau \in \left[\frac{1}{2} + 4h + \xi_0,\ 1 - 4h - \xi_0\right]$. $F(\tau)$ будет суммируемой на этом сегменте, так что почти все точки τ этого сегмента будут точками Лебега $F(\tau)$ (см. [9], стр. 224, и п. 9). Мы будем требовать, чтобы t_0 была одной из этих точек Лебега, так что:

$$\lim_{u \to 0} \frac{1}{u} \int_0^u |F(t_0) - F(t_0 + \xi)|\, d\xi = 0. \tag{16.7}$$

17. Перейдем к доказательству одной из основных лемм.

Лемма 19. *Пусть* $(a, b) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. *При всяком заданном достаточно малом* $h \leqslant \delta_0(a, b)$ *почти для всех точек* $t_0 \in (a, b)$ *будем иметь:*

$$F(t_0) = 0. \tag{17.1}$$

Доказательство. Пусть дан интервал $(a, b) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, и h столь мало, что сегмент S:

$$[a - 4,\ 01h;\ b + 4{,}01h] \subset \left[\frac{1}{2},\ 1\right]. \tag{17.2}$$

Фиксируем какое-либо из таких $h > 0$ и рассмотрим соответствующую функцию $F(\tau)$ (см. (16.6)).

Пусть $t_0 \in S$ — точка Лебега $F(\tau)$. Мы должны привести к противоречию гипотезу о том, что

$$F(t_0) \neq 0. \tag{17.3}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ (которое фиксируем в дальнейшем) и выберем $u_0 = u_0(t_0, \varepsilon)$ столь малым, что

$$\frac{1}{u}\int_0^u |F(t_0+\xi) - F(t_0)|\, d\xi < \varepsilon \text{ при } 0 < u \leqslant u_0(t_0, \varepsilon). \tag{17.4}$$

При определении «стаканчика И. М. Виноградова» $W(\xi)$ в п. 14, при заданном $x \geqslant 1$, положим:

$$\xi_0 = \min\left(u_0(t_0, \varepsilon), \frac{1}{x^2}\right). \tag{17.5}$$

Займемся оценкой снизу интеграла J_1 (см. (16.4)). Согласно (17.4) имеем:

$$\exp(t_0+4h)x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi)\, |F(t_0+\xi) - F(t_0)|\, d\xi \leqslant 2\varepsilon\xi_0 \cdot \exp(t_0+4h)x, \tag{17.6}$$

ибо $e^{\xi x} \leqslant e^{\frac{1}{x}} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$ в силу (17.5) и $0 \leqslant W(\xi) \leqslant 1$.
Далее, ввиду того, что

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} W(\xi)\, d\xi > \frac{\xi_0}{2}, \tag{17.7}$$

имеем

$$\exp(t_0+4h)x \cdot \left| \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) F(t_0)\, d\xi \right| > \frac{1}{2}\xi_0 |F(t_0)| \exp(t_0+4h)x. \tag{17.8}$$

Сравнивая с (16.4), (17.6) и (17.3), находим, что при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(t_0)$ (не зависящем от x)

$$|J_1| > \frac{\xi_0}{4} |F(t_0)| \exp(t_0+4h)x. \tag{17.9}$$

Для $|J_{1|_2}|$ мы найдем оценку сверху. Согласно (16.1)

$$|J_{1|_2}| \leqslant c_{15} x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0)x. \tag{17.10}$$

Далее, $t_0 > \frac{1}{2}$, так что $1 - t_0 < t_0$. Выберем x столь большим, чтобы, соответственно (17.5), было

$$\xi_0 = \frac{1}{x^2} \tag{17.11}$$

и

$$\frac{1}{4x^2} |F(t_0)| \exp(t_0+4h)x > 2c_{15}x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + \xi_0)x. \tag{17.12}$$

Из (17.9) и (17.12) находим:

$$|F(\Lambda, u_0)| = |J_{1|_2} + J_1| > \frac{1}{8} |F(t_0)|\, x^{-2} \exp(t_0+4h)x. \tag{17.13}$$

С другой стороны, оценим $|F(\Lambda, u_0)|$ сверху. Имеем по лемме (18), (15.6):

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{13} x^{19} A_0(x)\, e^{4xh},$$

причем, согласно (14.2), $A_0(x) = \xi_0^{-18} = x^{36}$ в силу (17.11). Таким образом:

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{13} x^{55} \exp(4xh). \tag{17.14}$$

Сопоставляя это с (17.13), при $x \to \infty$ получаем: $F(t_0) = 0$, что противоречит (17.3) и доказывает лемму 18.

Лемма 20. *Почти для всех точек* $t_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *имеем:* *

$$\Phi(t_0) = P_3(t_0), \tag{18.1}$$

где $P_3(t_0)$ *— кубический полином.*

Доказательство. Пусть $(a, b) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Для всякого заданного $h \leqslant h_0(a, b)$ имеем $F(\tau) = \Delta^4 \Phi(\tau) = 0$ для почти всех $\tau \in (a, b)$. Возьмем достаточно малое $\delta > 0$ и рассмотрим усреднение

$$\Phi_\delta(\tau) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Phi(\tau + u)\, du = \frac{1}{\delta} \int_\tau^{\tau+\delta} \Phi(\mu)\, d\mu. \tag{18.2}$$

При всяком заданном $h \leqslant h_0(a, b)$; $\tau \in (a, b)$ имеем:

$$\Delta^4 \Phi_\delta(\tau) = 0. \tag{18.3}$$

Из (18.2) видно, что $\Phi_\delta(\tau)$— непрерывная (даже абсолютно непрерывная) функция τ. Докажем, что $\Phi_\delta(\tau) = Q_\delta(\tau)$ — кубический полином с коэффициентами, зависящими от δ, при $\tau \in (a, b)$.

Имеем $\Delta^4 \Phi_\delta(\tau) = 0$ при всех достаточно малых h. Пусть сегмент $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Разделим его на N равных частей, где $h = \frac{\beta - \alpha}{N}$ достаточно мало; пусть точки деления суть $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_N = \beta$. Возьмем кубический полином [скажем, интерполяционный полином Лагранжа $Q_\delta(\tau)$], совпадающий с $\Phi_\delta(\tau)$ при $\tau = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Заменим $\Phi_\delta(\tau)$ на $\psi_\delta(\tau) = \Phi_\delta(\tau) - Q_\delta(\tau)$; тогда $\Delta^4 \psi_\delta(\tau) = 0$, и легко находим, что $\psi_\delta(\alpha_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

Возьмем теперь наряду со старыми точками деления новые $\frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{2} = \alpha_j'$. Определим новый кубический полином, совпадающий с $\psi_\delta(\tau)$ в точках $\alpha_0, \alpha_0', \alpha_1, \alpha_1'$. Тогда он должен совпадать с $\psi_\delta(\tau)$ во всех точках α_i, α_i', и, так как $\psi_\delta(\alpha_i) = 0$, то он тождественно равен 0, и $\psi_\delta(\alpha_i') = 0$. Снова вводим новые точки деления, вставляя их посередине двух старых. Рассуждая так далее, находим, что $\psi_\delta(\tau) = 0$ на всюду плотном множестве точек, и, в силу ее непрерывности, на всем $[\alpha, \beta]$ и стало быть, на всем (a, b). Итак, $\Phi_\delta(\tau) = Q_\delta(\tau)$; $\tau \in (a, b)$. Пусть теперь $\delta \to 0$, и τ — точка Лебега $\Phi(\mu)$. Тогда

$$\frac{1}{\delta} \int_\tau^{\tau+\delta} (\Phi(\mu) - \Phi(\tau))\, d\mu \to 0, \quad \text{при } \delta \to 0, \quad \text{так что } \Phi_\delta(\tau) = Q_\delta(\tau) \to \Phi(\tau)$$

во всех точках Лебега $\Phi(\tau)$.

Положим $Q_\delta(\tau) = \alpha_{0\delta}\tau^3 + \alpha_{1\delta}\tau^2 + \alpha_{2\delta}\tau + \alpha_{3\delta}$. Пусть τ_1, τ_2, τ_3, τ_4— точки Лебега $\Phi(\tau)$ и $\tau_i \neq \tau_j$ $(i \neq j)$. Имеем $Q_\delta(\tau) = \Phi(\tau_j) + \varepsilon_j(\delta)$; $\varepsilon_j(\delta) \to 0$ при

* Основная идея доказательства леммы 20 дана автору проф. И. П. Натансоном и проф. О. А. Ладыженской.

$\delta \to 0$. Разрешая эти уравнения относительно $\alpha_{i\delta}$, видим, что $\alpha_{i\delta}$ стремится к постоянным пределам α_i при $\delta \to 0$ и $Q_\delta(\tau) \to P_3(\tau)$. Итак, $\Phi(\tau) = P_3(\tau)$ во всех точках Лебега $\Phi(\tau)$ при $\tau \in (a, b)$, т. е. почти везде на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, что и доказывает лемму 20.

19. Лемма 10 (7.1) позволяет теперь писать:

$$G(z) = P(z) + z^4 J_{1/2}(z) + z^4 J_1(z), \tag{19.1}$$

где

$$J_{1/2}(z) = \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi(t)\, dt, \quad J_1(z) = \int_{1/2}^{1} e^{zt} (\alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3)\, dt. \tag{19.2}$$

Займемся $z^4 J_1(z)$. Прямым вычислением находим:

$$z^4 J_1(z) = e^z (\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3) + e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) \tag{19.3}$$

(β_i, γ_i — реальные константы).

Лемма 21. *В выражении* (19.3),

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0. \tag{19.4}$$

Доказательство. Имеем из (6.4): $G(z) = \gamma z^2 + \lambda e^z + s_0 g(z)$ ($s_0 = +1$ или -1). Отсюда

$$g(z) = s_0 (G(z) - \gamma z^2 - \lambda e^z). \tag{19.5}$$

Далее, замечаем, что при $x > 0$

$$|z^4 J_1(z)| \leqslant |z|^4 \int_0^1 |e^{zt}|\, |\Phi(t)|\, dt \leqslant c_{16} |z|^4 e^{x/2}. \tag{19.6}$$

В соединении с (19.5), (19.3) и (19.1) это дает (b_i — реальные константы)

$$g(z) = e^z (b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_0) + O(|z|^3) + O(|z|^4 e^{x/2}). \tag{19.7}$$

Теперь обратимся к п. 4 (соотношения (4.3), (4.5) и (4.6)—(4.9)). Положим $z = x \geqslant 1$; из (18.7) найдем:

$$u(x, 0) = e^x (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) + O(x^4 e^{x/2}). \tag{19.8}$$

Пусть $b_0 \neq 0$ и $b_0 > 0$. Из (4.5) находим при больших x:

$$\exp(2\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = O\left(\exp\left[-\frac{b_0}{2} x^3 e^x\right]\right), \tag{19.9}$$

что противоречит (4.8) (см. п. 4).

Если $b_0 < 0$, то получаем при $x \to \infty$ противоречие между (4.3) и (4.6). Значит, $b_0 = 0$. Совершенно так же обнаруживаем, что $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$. Но из (19.7) видим, что $b_0 = s_0 \beta_0$, $b_1 = s_0 \beta_1$, $b_2 = s_0 \beta_2$, откуда следует (19.4).

20. Теперь из (19.3) получаем ($\beta = \beta_3$)

$$z^4 J_1(z) = \beta e^z + e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3), \text{ так что:}$$

$$G(z) - \beta e^z - P(z) = z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi(t)\, dt + e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3). \tag{20.1}$$

Лемма 22. *Существует такой полином* $Q(t)$ *степени* $\leqslant 3$, *что*

$$z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} Q(t)\, dt = e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + \gamma_4. \tag{20.2}$$

Доказательство. Имеем (см., напр., [11], стр. 126—127) при любых z:

$$\alpha_0 z^4 \int_0^{1/2} t^3 e^{zt} dt = \alpha_0 e^{zt} (t^3 z^3 - 3t^2 z^2 + 6tz - 6) \Big|_0^{1/2}$$

$$\alpha_1 z^4 \int_0^{1/2} t^2 e^{zt} dt = \alpha_1 e^{zt} (t^2 z^3 - 2tz^2 + 2z) \Big|_0^{1/2}$$

$$\alpha_2 z^4 \int_0^{1/2} te^{zt} dt = \alpha_2 e^{zt} (tz^3 - z^2) \Big|_0^{1/2}$$

$$\alpha_3 z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} dt = \alpha_3 e^{zt} z^3 \Big|_0^{1/2}$$

откуда видим, что при подходящем выборе α_i получается (20.2).

Полагая теперь $\gamma_4 = \mu$, находим из (20.1):

$$G(z) - P(z) - \beta e^z - \mu = z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} (\Phi(t) + Q(t)) dt. \tag{20.3}$$

Обозначим: $G_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y) = G(z) - P(z) - \beta e^z - \mu$; $\Phi(t) + Q(t) = \Phi_1(t)$, ($Q(t)$ кубический полином). Получим:

$$G_1(z) = z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi(t) dt. \tag{20.4}$$

Здесь $G_1(z)$ — целая функция, ведущая себя совершенно так же, как $G(z)$. Она реальна на реальной оси и, ввиду того, что для функции $\mathbf{E}(z) = -\beta e^z - \mu$ имеем $\operatorname{Re}\mathbf{E}(x + 2\pi i m) - \operatorname{Re}\mathbf{E}(x) = 0$, из леммы 13 (10.7)

$$| u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0) | < (12 | \alpha_0 | x + 4 | \alpha_1 | + 4\gamma) \pi^2 m^2 \tag{20.5}$$

при $x \geqslant 1$ и целых m.

Поэтому мы можем действовать как ранее. При подходящей $\Lambda(t, x)$ периодической с периодом 1, четной и имеющей достаточно быстро сходящийся ряд Фурье, составляем, как в (10.5), равенство

$$F(\Lambda, u_1) = \int_0^{1/2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi_1(t) dt. \tag{20.6}$$

По формуле (11.7) составляем функцию $U(v, x, t_0)$, где

$$t_0 \pm (4h + \xi_0) \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{20.7}$$

$$\Gamma_1(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(v-t)} (t - v)^3 U(v, x, t_0) dv. \tag{20.8}$$

Тогда получим:

$$\Gamma_1(0, x) = \Gamma_1(1, x) = 0. \tag{20.9}$$

Далее, $\Gamma_1(t, x)$ не изменяется после $t = t_0 + 4h + \xi_0$, так что $\Gamma_1(t, x) = 0$ при $t > t_0 + 4h + \xi_0$. Составляем, как в (12.5), функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x) + \Gamma_1(1 - t, x). \tag{20.10}$$

В силу (20.7) $\left(t_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$ имеем $\Gamma(1 - t, x) = 0$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x) \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{20.11}$$

Это сильно облегчает дело. Из (20.11) имеем при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = \frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Gamma_1(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0), \tag{20.12}$$

откуда

$$F(\Lambda, u_1) = \int_0^{1/2} e^{xv}U(v, x, t_0)\,\Phi_1(v)\,dv. \tag{20.13}$$

Отсюда, как и ранее, приходим к выводу, что при $(a, b) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $h \leqslant h_0(a, b)$ заданном, почти для всех $t \in (a, b)$ будет:

$$\Delta^4\Phi_1(t) = 0. \tag{20.14}$$

Но $\Phi_1(t) = \Phi(t) + Q(t)$, где $Q(t)$—кубический полином, и $\Delta^4 Q(t) = 0$, так что

$$\Delta^4\Phi(t) \approx 0,\ t \in (a, b);\ h \leqslant h_0(a, b).$$

Отсюда находим: $\Phi(t) \approx Q_3(t)$ (кубический полином) при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

21. Подставляя в (19.1), непосредственно находим:

$$G(z) = P(z) + \beta e^z + \mu_1 + e^{z/2}(\gamma_0 z + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3), \tag{21.1}$$

где μ_1— новая константа.

Лемма 23. *В выражении* (21.1) $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Доказательство.

$$G_1(z) = e^{z/2}(\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + \mu_0 - \mu_1. \tag{21.2}$$

Далее, используем (20.5). Из (21.2) находим: при $m = 3$

$$\begin{aligned} u_1(x, 6\pi) - u_1(x, 0) &= -e^{x/2}(\gamma_0(x^3 - 108\pi^2 x^2) + \gamma_1(x^2 - 36\pi^2) + \\ &+ \gamma_2 x + \gamma_3) - e^{x/2}(\gamma_0 x^3 + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3) = \\ &= -e^{x/2}(2\gamma_0 x^3 + x^2(2\gamma_1 - 108\pi^2\gamma_0) + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 x - 36\pi^2\gamma_1). \end{aligned} \tag{21.3}$$

Сравнивая с (20.5), при $x \to \infty$, находим: $\gamma_0 = 0$, затем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$, что и доказывает лемму 23.

Итак, находим:

$$G(z) = \beta e^z + P_1(z), \tag{21.4}$$

где $P_1(z)$— кубический полином. Из (19.5) находим:

$$g(z) = \lambda_1 e^z + P_2(z), \tag{21.5}$$

где $P_2(z)$ — полином степени $\leqslant 3$. Мы должны доказать, что $\lambda_1 \geqslant 0$ и что $P_2(z)$ — квадратный полином.

Будем действовать, как в п. 4. Допустим, что $\lambda_1 < 0$. Имеем из (2.3)

$$\exp g(z) = \mathbf{E}(\exp zY_1). \tag{21.6}$$

Пусть V — независимая от Y_1 случайная величина, такая, что:

$$\mathbf{E}\exp(zV) = \exp z^2.$$

Тогда

$$\exp(x^2 + \lambda_1 e^x + P_2(x)) = \mathbf{E}\exp x(Y_1 + V). \tag{21.7}$$

Как и в п. 4, убеждаемся, что при $x \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\exp x(Y_1 + V) > a_0 e^{a_1 x}. \tag{21.8}$$

Но, если $\lambda_1 < 0$, то при $x \to \infty$ левая часть (21.7) стремится к 0, что противоречит (21.8). Итак, $\lambda_1 \geqslant 0$.

Пусть $P_2(z) = \gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3$. Докажем, что:

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 \geqslant 0. \tag{21.9}$$

Рассмотрим

$$u(x, y) = \operatorname{Re} g(z) = \lambda_1 e^x \cos y + \gamma_0(x^3 - 3xy^2) + \gamma_1(x^2 - y^2) + \gamma_2 x + \gamma_3. \tag{21.10}$$

Мы должны иметь:

$$u(x, 0) \geqslant u(x, y). \tag{21.11}$$

Положим: $y = 2m\pi$; m — целое. Имеем:

$$u(x, 0) - u(x, 2m\pi) = -3\gamma_0 x(2\pi m)^2 + \gamma_1(2\pi m)^2. \tag{21.12}$$

Если $\gamma_0 > 0$, то при $x \to \infty$, $m = 1$ получаем противоречие с (21.11). Если $\gamma_0 < 0$, то при $x \to -\infty$, $m = 1$, получаем такое же противоречие. Итак, $\gamma_0 = 0$. Далее, если $\gamma_1 < 0$, то при $m = 1$, (21.12) противоречит (21.11). Итак, (21.9) доказано.

22. Имеем:

$$g(z) = \lambda_1 e^z + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3, \quad \gamma_1 \geqslant 0. \tag{22.1}$$

Но мы должны иметь: $g(0) = 0$, так что $\gamma_3 = -\lambda_1$, и

$$g(z) = \lambda_1(e^z - 1) + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z. \tag{22.2}$$

Итак, Y_1 есть композиция законов Пуассона и Гаусса, быть может, вырождающихся при $\lambda_1 = 0$ или $\gamma_1 = 0$.

Нужно доказать еще, что и Y_2 есть подобная же композиция, и что дисперсии Гауссовых и Пуассоновых компонент складываются в дисперсии основных подобных же компонент.

Обратимся к (2.2). Имеем:

$$\mathbf{E}\exp(zY_2) = \exp[(\lambda - \lambda_1)(e^z - 1) + (\gamma - \gamma_1)z^2 - \gamma_2 z]. \tag{22.3}$$

Достаточно доказать, что $\lambda - \lambda_1 \geqslant 0$, $\gamma - \gamma_1 \geqslant 0$. Вводя дополнительную нормальную компоненту V, независимую от Y_2, и такую, что $\mathbf{E}\exp(zV) = \exp z^2$, и, рассуждая совершенно так же, как в п. 21, находим, что $\lambda - \lambda_1 \geqslant 0$. После этого, рассуждая как в конце п. 21, находим, что $\gamma - \gamma_1 \geqslant 0$.

Этим основная теорема и утверждение (0.4), наконец, доказаны.

23. Мы считали, что $\gamma > 0$ и $\lambda > 0$. Докажем, что можно считать

$\gamma = 0$ или $\lambda = 0$, т. е. покажем, как теоремы Г. Крамера и Д. А. Райкова выводятся из нашей теоремы.

Пусть X— Пуассонова случайная величина, и $X = Y_1 + Y_2$, где Y_1 и Y_2 независимы. Пусть Z нормально с дисперсией δ и независимо от (Y_1, Y_2), и, стало быть, от X. Имеем: $Z + X = Z + Y_1 + Y_2$. По нашей теореме: $Y_2 = Y_{21} + Y_{22}$, где $\mathbf{D}(Y_{21}) \leqslant \delta$, и Y_{22}— Пуассонова величина. При $\delta \to 0$ получаем, что Y_2 — Пуассонов. Точно так же доказываем, что Y_1— Пуассонов. Замена слов «Пуассонов» на «Гауссов» и обратно дает и теорему Г. Крамера.

Автор благодарит проф. И. П. Натансона и проф. О. А. Ладыженскую за любезную помощь.

Поступила в редакцию
19. 11. 56 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer, Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, Math. Zeitschr., **41**, (1936), 405—414.
[2] Д. А. Райков, О разложении закона Пуассона, ДАН СССР, **14**, № 1 (1937), 9—11.
[3] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГТТИ, 1954 (2 изд.).
[4] Д. А. Райков, О разложении законов Гаусса и Пуассона, Изв. АН СССР, сер. матем., **1** (1938), 91—124.
[5] Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, ОНТИ, 1934.
[6] R. Boas, Entire functions, N. Y. 1954.
[7] R. Paley, N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Publ., **19** (1934).
[8] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Тр. МИАН, **23** (1947).
[9] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, ГТТИ, 1950.
[10] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления *III*, 1949.
[11] Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, ГИИЛ, 1948.

ON FACTORIZING THE COMPOSITION OF A GAUSSIAN AND A POISSONIAN LAW

YU. V. LINNIK (LENINGRAD)

(*Summary*)

The paper contains a detailed proof for the following theorem: *the composition of a Gaussian and a Poissonian law can be factorized only into similar compositions.* More precisely, let $X = X_1 + X_2$ where X_1 is a Gaussian component and X_2 a Poissonian component independent of X_1. If there is some other factorization: $X = Y_1 + Y_2$, Y_1 being independent of Y_2, then;

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12},$$
$$Y_2 = Y_{21} + Y_{22}.$$

Where Y_{11}, Y_{21} are Gaussisn and Y_{12}, Y_{22} Poissonian, all mutually independent, and

$$\mathbf{D}(Y_{11}) + \mathbf{D}(Y_{21}) = \mathbf{D}(X_1);$$
$$\mathbf{D}(Y_{12}) + \mathbf{D}(Y_{22}) = \mathbf{D}(X_2).$$

Thus, H. Cramér's theorem on factorizing the normal law, and D. A. Raykov's theorem on factorizing the Poissonian law are special cases of this theorem.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1957

О ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ*

ЦЗЯН ЦЗЭ-ПЕЙ

§ 1. Определение и основные свойства

В настоящей статье будут рассматриваться лишь поля на плоскости — случайные функции от двух переменных; переход к случайным функциям от n переменных не внесет никаких принципиальных усложнений и мы на этом не будем останавливаться. Задача об экстраполировании будет пониматься как задача об определении значения поля в некоторой точке в верхней полуплоскости по его значениям в нижней полуплоскости; к такой задаче мы придем, например, рассматривая второе из переменных, от которых зависит поле, как временное переменное, а первое — как пространственное, и ставя задачу о приближенном нахождении значения поля в какой-то точке в «будущий» момент времени по всем значениям поля «в прошлом».

Определение. *Непрерывным однородным случайным полем* называется семейство комплексных случайных величин $x(s, t)$, где s, t — вещественные числа, такое, что $\mathbf{M}|x(s, t)|^2 < +\infty$, $\lim\limits_{h_1 \to 0,\, h_2 \to 0} \mathbf{M}|x(s+h_1, t+h_2) - x(s, t)|^2 = 0$ и

$$B_x(s, t) = \mathbf{M}[x(s+m, t+n)\overline{x(m, n)}] \tag{1}$$

не зависит от m и n.

Функция $B_x(s, t)$, очевидно, является непрерывной положительно определенной функцией и, следовательно

$$B_x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, dF_x(\lambda, \mu), \tag{2}$$

где $F_x(\lambda, \mu)$ — ненормированная двумерная функция распределения, называемая спектральной функцией поля $\{x(s, t)\}$.

Будем рассматривать некоторые пространства случайных величин; определим в них скалярное произведение равенством: $(x, y) = \mathbf{M}(x, \bar{y})$ (т. е. сходимость всегда будем понимать как сходимость в среднем квадратичном).

---

* Для однородного случайного поля от дискретного аргумента соответствующие результаты были сформулированы без доказательства в моей заметке в ДАН, т. 112, № 2 (1957). Доказательство, даваемое в настоящей работе, удается с небольшими изменениями перевести и на дискретный случай.

Пусть H_x — минимальное линейное замкнутое пространство, содержащее все величины $x(m, n)$, а $H_x(t)$ — минимальное линейное замкнутое подпространство H_x, содержащее все $x(m, n)$ с $-\infty < m < +\infty$ и $n \leqslant t$. Обозначим

$$S_x = \bigcap_t H_x(t). \tag{3}$$

Если

$$S_x = H_x, \tag{4}$$

то однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ мы назовем *сингулярным*.

Каждый элемент $x(s, t)$ поля $\{x(s, t)\}$ однозначно представляется в виде суммы:

$$x(s, t) = \eta(s, t) + \xi(s, t), \tag{5}$$

где $\xi(s, t) \in H_x(0)$, а $\eta(s, t)$ — ортогонально $H_x(0)$.

Положим

$$\rho_x^2(s, t) = \| \eta(s, t) \|^2. \tag{6}$$

Очевидно $\rho_x^2(s, t) = \rho_x^2(s', t) = \rho_x^2(t)$,

$$\rho_x^2(t_1) \leqslant \rho_x^2(t_2) \quad \text{при } t_1 \leqslant t_2, \tag{7}$$

так что существует

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_x^2(t) = \sigma_\infty^2. \tag{8}$$

Если

$$\sigma_\infty^2 = \mathbf{M} |x(s, t)|^2 = \| x \|^2, \tag{9}$$

то однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ мы назовем *регулярным*.

Легко видеть, что для того, чтобы однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ было регулярным, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$S_x = 0. \tag{10}$$

Обозначим через $x_1(s, t)$ проекцию $x(s, t)$ в пространство S_x и положим

$$x_2(s, t) = x(s, t) - x_1(s, t), \tag{11}$$

т. е.

$$x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t). \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что $\{x_1(s, t)\}$ является сингулярным однородным случайным полем, а $\{x_2(s, t)\}$ является регулярным полем, причем они взаимно ортогональны друг другу.

Поля $\{x_1(s, t)\}$ и $\{x_2(s, t)\}$ будем называть соответственной сингулярной и регулярной компонентой поля $\{x(s, t)\}$.

§ 2. Вспомогательные предложения

Известно (см., например, [1]), что для всякого однородного случайного поля $x(s, t)$ мы имеем следующее спектральное представление:

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} \, dZ_x(\lambda, \mu), \tag{13}$$

где $Z_x(\lambda, \mu)$ — случайная функция с независимыми приращениями от двух переменных такая, что

$$\mathrm{M}Z_x(S)\overline{Z_x(S')} = \int_S \int_{S'} dF_x(\lambda, \mu). \tag{13'}$$

Положим

$$y_h(s, t) = x(s, t) - \mathrm{proj}_{H_x(t-h)}x(s, t), \quad (h > 0) \tag{14}$$

где $\mathrm{proj}_{H_x(t-h)}x(s, t)$ означает проекцию $x(s, t)$ в пространство $H_x(t-h)$.

Тогда существует функция $\gamma_h(\lambda, \mu)$ класса $L^2(dF_x(\lambda, \mu))$ такая, что

$$y_h(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\gamma_h(\lambda, \mu)\, dZ_x(\lambda, \mu). \tag{15}$$

Ясно, что $\{y_h(s, t)\}$ является непрерывным однородным случайным полем и его спектральная функция $F_{y_h}(\lambda, \mu)$ определена равенством

$$F_{y_h}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 dF_x(\lambda, \mu). \tag{16}$$

Очевидно, что для того, чтобы поле $\{x(s, t)\}$ было сингулярным необходимо и достаточно выполнение равенства $y_h(s, t) \equiv 0$.

Лемма 2.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 dF_x(\lambda, \mu) = 0, \quad (|t| \geqslant h) \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\gamma_h(\lambda, \mu)\, dF_x(\lambda, \mu) = 0, \quad (t \geqslant h). \tag{18}$$

Доказательство. По определению $y_h(s, t)$ мы имеем

$$\mathrm{M}[y_h(s_2, t_2)\overline{y_h(s_1, t_1)}] = 0, \quad (t_2 - t_1 \geqslant h) \tag{19}$$

$$\mathrm{M}[y_h(s_2, t_2)\overline{x(s_1, t_1)}] = 0, \quad (t_2 - t_1 \geqslant h). \tag{20}$$

Из этих двух отношений следуют непосредственно равенства (17) и (18).

Воспользуемся тем, что совокупность всех $y_h(mh, nh)$, для которых m, n — целые, образует однородное случайное поле с дискретным параметром. Заметив равенство (19), мы убеждаемся в том, что корреляционную функцию этого дискретного поля $\{y_h(mh, nh)\}$ можно представить в виде:

$$B_{y_h}(mh, nh) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\lambda+n\mu)}\, dN_h(\lambda)\, d\mu, \tag{21}$$

где $N_h(\lambda)$ — спектральная функция стационарной последовательности $\{y_h(mh, 0)\}$.

Так как

$$B_{y_h}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, dF_{y_h}(\lambda, \mu), \tag{22}$$

то, в частности

$$B_{y_h}(mh, nh) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(m\lambda+n\mu)}\, dF_{y_h}\left(\frac{\lambda}{h}, \frac{\mu}{h}\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\lambda+n\mu)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{2j\pi+\lambda}{h}, \frac{2l\pi+\mu}{h}\right). \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, \frac{\mu+2l\pi}{h}\right) = \frac{1}{2\pi}\, dN_h(\lambda)\, d\mu. \tag{24}$$

С другой стороны

$$B_{y_h}(mh, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imh\lambda}\, dF_{y_h}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\lambda}\, dF_{y_h}\left(\frac{\lambda}{h}, +\infty\right) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{(2j-1)\pi}^{(2j+1)\pi} e^{im\lambda}\, dF_{y_h}\left(\frac{\lambda}{h}, +\infty\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\lambda} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right). \tag{25}$$

Поэтому

$$dN_h(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right), \tag{26}$$

и, следовательно,

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, \frac{\mu+2l\pi}{h}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu. \tag{27}$$

Равенство (16) показывает, что мера $dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right)$ абсолютно непрерывна относительно меры $dF_x\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right)$. В силу (27) вытекает, что мера $\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{y_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, \frac{\mu+2l\pi}{h}\right)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_x\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu$. Отсюда мы заключаем, что мера $dF_{y_h}(\lambda, \mu)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_x\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu$, а следовательно, и относительно меры $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{h+|j|}}\, dF_x\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu$. Если теперь мы ограничимся целыми положительными значениями h, то можно будет утверждать, что при любом таком h мера $dF_{y_h}(\lambda, \mu)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{h+|j|}}\, dF_x\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu$, не зависящей от h.

Полученный нами результат составляет содержание следующей леммы.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{x(s, t)\}$ — *любое непрерывное однородное случайное поле, а* $\{y_h(s, t)\}$ — *непрерывное однородное случайное поле, определенное равенством* (14). *Тогда, при целом положительном* h, *мера* $dF_{y_h}(\lambda, \mu)$ *абсолютно непрерывна относительно меры*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{h+|j|}} dF_x\left(\lambda + \frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu.$$

(Заметим, что здесь

$$F_x(\lambda, +\infty) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_x(\lambda, \mu), \tag{28}$$

где $F_x(\lambda, \mu)$ — спектральная функция поля $\{x(s, t)\}$).

Из леммы 2.2, в силу (16), (17) и (18), получаем следующую лемму:

Лемма 2.3. *Если* h — *целое положительное, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 d\overline{F}_x(\lambda, \mu) = 0, \tag{29}$$

$$F_{y_h}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} dp_x(\lambda)\, d\mu, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} dp_x(\lambda)\, d\mu = 0, \quad (|t| \geqslant h) \tag{31}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} \gamma_h(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} dp_x(\lambda)\, d\mu = 0, \quad (t \geqslant h) \tag{32}$$

$$\mathbf{M}|y_h(s, t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} dp_x(\lambda)\, d\mu, \tag{33}$$

где

$$dp_x(\lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{h+|j|}} dF_x\left(\lambda + \frac{2j\pi}{h}, +\infty\right), \tag{34}$$

мера $d\overline{F}_x(\lambda, \mu)$ — *сингулярная часть меры* $dF_x(\lambda, \mu)$ *относительно меры* $dp_x(\lambda)\, d\mu$; $\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}$ — *производная абсолютно непрерывной относительно* $dp_x(\lambda)\, d\mu$ *части меры* $dF_x(\lambda, \mu)$ *по мере* $dp_x(\lambda)\, d\mu$.

§ 3. Регулярное и сингулярное однородное случайное поле

Мы полностью сохраняем все введенные в предыдущем обозначения. В этом параграфе мы укажем налагаемые на спектральную функцию условия, гарантирующие регулярность или сингулярность поля $\{x(s, t)\}$.

Теорема 3.1. *Если однородное случайное поле* $\{x(s, t)\}$ *является регулярным, то*

1°. *мера* $dF_x(\lambda, \mu)$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $dp_x(\lambda)\,d\mu$,

2°. *существует* λ*-множество* δ_λ *такое, что*

а)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu < +\infty, \quad (\lambda \in \delta_\lambda), \tag{35}$$

б) *на множестве* $\overline{\delta}_\lambda \otimes (-\infty, \infty)$ *почти всюду (относительно меры* $dp_x(\lambda)\,d\mu$*) имеет место равенство*

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\,d\mu} = 0. \tag{36}$$

Доказательство. (1°) Так как мера $d\overline{F}_x(\lambda, \mu)$ является сингулярной частью меры $dF_x(\lambda, \mu)$ относительно меры $dp_x(\lambda)\,d\mu$, то существует (λ, μ)-множество M_0 такое, что

$$d\overline{F}_x(A) = d\overline{F}_x(AM_0) \tag{37}$$

для всех измеримых (λ, μ)-множеств A и

$$\int_{\overline{M}_0} dp_x(\lambda)\,d\mu = 0. \tag{38}$$

Положим

$$x_\nu(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\,dZ_x^{(\nu)}(\lambda, \mu), \quad (\nu = 1, 2), \tag{39}$$

где

$$\begin{cases} Z_x^{(1)}(A) = Z_x(A\overline{M}_0) \\ Z_x^{(2)}(A) = Z_x(A\overline{M}_0) \end{cases} \tag{40}$$

для всех измеримых (λ, μ)-множеств A. Ясно, что

$$x(s, t) = x_1(s, t) + x_1(s, t), \tag{41}$$

причем $\{x_1(s, t)\}$ и $\{x_2(s, t)\}$ являются взаимно ортогональными друг другу однородными случайными полями. Из (15), (39) и (40) следует

$$y_h(s, t) = \sum_{\nu=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\,\gamma_h(\lambda, \mu)\,dZ_x^{(\nu)}(\lambda, \mu), \tag{42}$$

но из (37)—(40), в силу (29), мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 dF_{x_2}(\lambda, \mu) = \iint_{M_0} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 dF_x(\lambda, \mu) =$$

$$= \iint_{M_0} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 d\overline{F}_x(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 d\overline{F}_x(\lambda, \mu) = 0. \tag{43}$$

Отсюда

$$y_h(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\gamma_h(\lambda, \mu)\, dZ_x^{(1)}(\lambda, \mu). \tag{44}$$

По определению поля $\{y_h(s, t)\}$ в силу (32) нетрудно видеть, что

$$y_h(s, t) = x_1(s, t) - \mathrm{proj}_{H_{x_1}(t-h)} x_1(s, t), \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\| y_h(s, t)\|^2 \leqslant \| x_1(s, t)\|^2, \tag{46}$$

из чего, в силу регулярности поля $\{x(s, t)\}$, находим:

$$\| x(s, t)\|^2 = \lim_{h\to+\infty} \| y_h(s, t)\|^2 \leqslant \| x_1(s, t)\|^2. \tag{47}$$

С другой стороны,

$$\| x(s, t)\|^2 = \| x_1(s, t)\|^2 + \| x_2(s, t)\|^2, \tag{48}$$

поэтому

$$x_2(s, t) \equiv 0. \tag{49}$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

(2°) Заметив (31) и (32), по теореме Фубини мы убедимся, что для почти всех λ (относительно меры $dp_x(\lambda)$) имеют место равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,|\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, d\mu = 0 \quad (|t| \geqslant h), \tag{50}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\gamma_h(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, d\mu = 0 \quad (t \geqslant h). \tag{51}$$

Пусть

$$\alpha_h(\lambda) = \left\{\lambda;\ |\gamma_h(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} = 0,\ \text{для почти всех } \mu \text{ на } -\infty < \mu < \infty\right\}, \tag{52}$$

где $\{\lambda; \ldots\}$ — множество точек λ, удовлетворяющих условию, указанному справа от буквы λ в фигурных скобках. Тогда, используя теорему Хилла—Тамаркина ([8], [9]) и рассуждая аналогично тому, как это сделано в [5], стр. 148, мы находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\right|}{1+\mu^2}\, d\mu < +\infty, \quad \text{при } \lambda \in \overline{\alpha_h(\lambda)}. \tag{53}$$

Положим

$$\beta(\lambda) = \left\{\lambda;\ \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} = 0,\ \text{для почти всех } \mu \text{ на } -\infty < \mu < \infty\right\} \tag{54}$$

$$\xi(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(\lambda) - \beta(\lambda), \tag{55}$$

$$\delta_\lambda = \overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(\lambda)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{\alpha_n(\lambda)}. \tag{56}$$

Из (53) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\right|}{1+\mu^2} d\mu < +\infty \quad \text{при } \lambda \in \delta_\lambda. \tag{57}$$

Если мы сможем показать, что $dp_x(\lambda)$-мера множества $\xi(\lambda)$ равна нулю, то отсюда будет вытекать, что на множестве $\delta_\lambda \otimes (-\infty, \infty)$ почти всюду (относительно меры $dp_x(\lambda)\, d\mu$) выполняется равенство

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} = 0. \tag{58}$$

Таким образом, все требования второй части теоремы будут выполнены.

Итак, нам остается доказать, что $dp_x(\lambda)$-мера множества $\xi(\lambda)$ равна нулю. С этой целью положим

$$Q = \xi(\lambda) \otimes (-\infty, \infty), \tag{59}$$

$$\begin{cases} dZ_{\omega_1}(A) = dZ_x(AQ) \\ dZ_{\omega_2}(A) \quad dZ_x(A\overline{Q}) \end{cases} \tag{60}$$

для всех измеримых (λ, μ)-множеств A.

Пусть

$$\omega_\nu(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, dZ_{\omega_\nu}(\lambda, \mu) \quad (\nu = 1, 2). \tag{61}$$

Очевидно, что

$$x(s, t) = \omega_1(s, t) + \omega_2(s, t), \tag{62}$$

причем $\{\omega_1(s, t)\}$ и $\{\omega_2(s, t)\}$ являются взаимно ортогональными друг другу однородными случайным полями. Далее

$$y_n(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, \gamma_n(\lambda, \mu)\, dZ_x(\lambda, \mu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, \gamma_n(\lambda, \mu)\, dZ_{\omega_\nu}(\lambda, \mu). \tag{63}$$

Из (59) — (61) и (52) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n(\lambda, \mu)|^2\, dF_{\omega_1}(\lambda, \mu) = \iint_Q |\gamma_n(\lambda, \mu)|^2\, dF_x(\lambda, \mu) =$$

$$= \iint_Q |\gamma_n(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, dp_x(\lambda)\, d\mu =$$

$$= \int_{\xi(\lambda)} dp_x(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n(\lambda, \mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, d\mu = 0. \tag{64}$$

Отсюда заключаем:

$$y_n(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\gamma_n(\lambda, \mu)\, dZ_{\omega_2}(\lambda, \mu). \tag{65}$$

По определению поля $\{y_n(s, t)\}$, в силу (32) легко видеть, что

$$y_n(s, t) = \omega_2(s, t) - \mathrm{proj}_{H_{\omega_2}(t-n)}\omega_2(s, t), \tag{66}$$

и, следовательно

$$\|y_n(s, t)\|^2 \leqslant \|\omega_2(s, t)\|^2. \tag{67}$$

Из чего, в силу регулярности имеем:

$$\|x(s, t)\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\|y_n(s, t)\|^2 \leqslant \|\omega_2(s, t)\|^2. \tag{68}$$

С другой стороны,

$$\|x(s, t)\|^2 = \|\omega_1(s, t)\|^2 + \|\omega_2(s, t)\|^2. \tag{69}$$

Сравнивая (68), и (69), заключаем, что

$$\omega_1(s, t) \equiv 0, \tag{70}$$

и, значит,

$$\int\int_Q \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, dp_x(\lambda)\, d\mu = 0. \tag{71}$$

Отсюда вытекает непосредственно, что $dp_x(\lambda)$-мера множества $\xi(\lambda)$ равна нулю. Доказательство нашей теоремы закончено.

Теорема 3.2. *Если однородное случайное поле* $\{x(s, t)\}$ *является регулярным, то*

1°. *меры* $dF_x(\lambda, \mu)$ *и* $dF_x(\lambda, +\infty)\, d\mu$ *абсолютно непрерывны одна относительно другой*;

2°. *для почти всех* λ (*относительно меры* $dF_x(\lambda, +\infty)$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\right|}{1+\mu^2}\, d\mu < +\infty. \tag{72}$$

Доказательство. По теореме 3.1, имеем

$$F_x(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, dp_x(\lambda)\, d\mu, \tag{73}$$

и, в частности,

$$F_x(\lambda, +\infty) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, dp_x(\lambda)\, d\mu = \int_{-\infty}^{\lambda} w(\lambda)\, dp_x(\lambda), \tag{74}$$

где

$$w(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}\, d\mu. \tag{75}$$

В силу теоремы 3.1 (2°)

$$w(\lambda) > 0, \quad (\lambda \in \delta_\lambda) \tag{76}$$

$w(\lambda) = 0$ для почти всех λ (относительно меры $dp_x(\lambda)$) на множестве $\overline{\delta_\lambda}$.

Положим теперь

$$l(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1, & \text{при } \lambda \overline{\in} \delta_\lambda \\ \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} \cdot \dfrac{1}{w(\lambda)}, & \text{при } \lambda \in \delta_\lambda. \end{cases} \tag{77}$$

Тогда

$$F_x(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} l(\lambda, \mu)\, w(\lambda)\, dp_x(\lambda)\, d\mu = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} l(\lambda, \mu)\, dF_x(\lambda, +\infty)\, d\mu. \tag{78}$$

Отсюда немедленно следует первое утверждение теоремы.

Переходя к доказательству второй части теоремы, заметим прежде всего, что в силу (36) множество $\overline{\delta_\lambda}$ имеет нулевую $dF_x(\lambda, \infty)$-меру. Поэтому нам достаточно доказать, что при $\lambda \in \delta_\lambda$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} \right|}{1 + \mu^2}\, d\mu,$$

но, действительно, в силу (77), (78), по теореме 3.1 (2°) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} \right|}{1 + \mu^2}\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log l(\lambda, \mu)|}{1 + \mu^2}\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} \right|}{1 + \mu^2}\, d\mu +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log w(\lambda)|}{1 + \mu^2}\, d\mu = \pi |\log w(\lambda)| + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu} \right|}{1 + \mu^2}\, d\mu < +\infty. \tag{79}$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть* $\{x(s, t)\}$ — *однородное случайное поле, а* $F_x(\lambda, \mu)$ — *его спектральная функция. Если*

1°. *существует определенная на* λ*-оси мера* $dK(\lambda)$ *такая, что мера* $dF_x(\lambda, \mu)$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $dK(\lambda)\, d\mu$;

2°. *имеется* λ*-множество* δ_λ *такое, что* а) *на множестве* $\overline{\delta_\lambda} \otimes (-\infty, \infty)$ *почти всюду (относительно меры* $dK(\lambda)\, d\mu$*) имеет место равенство*

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dK(\lambda)\, d\mu} = 0, \tag{80}$$

б)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dK(\lambda)\, d\mu} \right|}{1 + \mu^2}\, d\mu < +\infty, \text{ при } \lambda \in \delta_\lambda, \tag{81}$$

то поле $\{x(s, t)\}$ — *регулярно.*

Доказательство. Положим

$$\varphi(\lambda, \mu) = \sqrt{\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dK(\lambda)\, d\mu}}, \tag{82}$$

тогда при любом $\lambda \in \delta_\lambda$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log \varphi(\lambda, \mu)|}{1+\mu^2}\, d\mu < +\infty. \tag{83}$$

В силу теоремы Paley — Wiener'a (см. [6], [8]) отсюда вытекает, что для всякого $\lambda \in \delta_\lambda$ существует такая функция $g(\lambda, t)$, что

1) $g(\lambda, t) = 0,\ t \leqslant 0,$
2) $g(\lambda, t) \in L_2(-\infty, \infty)$ как функция t,
3) $|k(\lambda, \mu)| = \varphi(\lambda, \mu),$

где

$$k(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{A\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-A}^{A} e^{-i\mu v}\, g(\lambda, v)\, dv. \tag{84}$$

В самом деле, мы можем выбирать такую функцию $g(\lambda, t)$ следующим образом:

$$g(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{A\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-A}^{A} e^{itu} f(\lambda, u)\, du. \tag{85}$$

Здесь

$$f(\lambda, u) = \lim_{v\to 0^-} f(\lambda, u+iv), \tag{86}$$

где

$$f(\lambda, \omega) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\mu\omega}{\mu-\omega}\,\frac{\log\varphi(\lambda, \mu)}{1+\mu^2}\, d\mu\right\} \quad (\operatorname{Im}(\omega) < 0). \tag{87}$$

Теперь из (84) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\, |k(\lambda, \mu)|^2\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, v+t)\, \overline{g(\lambda, v)}\, dv, \quad (\lambda \in \delta_\lambda) \tag{88}$$

и, следовательно, при $\lambda \in \delta_\lambda$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\, \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dK(\lambda)\, d\mu}\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, v+t)\, \overline{g(\lambda, v)}\, dv. \tag{89}$$

Если мы положим

$$g(\lambda, t) \equiv 0, \quad (\lambda \in \overline{\delta}_\lambda), \tag{90}$$

то равенство (89) будет иметь место для почти всех λ (относительно меры $dK(\lambda)$). Умножая обе части равенства (89) на $e^{is\lambda}$, а затем интегрируя обе части равенства на $-\infty < \lambda < \infty$ по мере $dK(\lambda)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, dF_x(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, v+t)\, \overline{g(\lambda, v)}\, dK(\lambda)\, dv, \tag{91}$$

то есть

$$B_x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, v+t)\overline{g(\lambda, v)}\, dK(\lambda)\, dv. \tag{92}$$

Согласно теореме Karhunen'a (см. [4]) из (92) следует, что поле $\{x(s, t)\}$ можно представить в виде:

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}(\lambda, \mu+t)\, d\xi(\lambda, \mu), \tag{93}$$

где $d\xi(\lambda, \mu)$ обладает следующими свойствами:

1) $\xi(A)$ — случайная величина (при любом измеримом по $dK(\lambda)\, d\mu$ (λ, μ)-множестве A).

2) $\xi(A_1 + A_2) = \xi(A_1) + \xi(A_2)$ для непересекающих измеримых (λ, μ)-множеств A_1 и A_2.

3) $M\{\xi(A_1)\overline{\xi(A_2)}\} = \iint_{A_1 A_2} dK(\lambda)\, d\mu.$ (94)

Так как $g(\lambda, \mu) = 0$, $(\mu < 0)$, то из этого представления поля $\{x(s, t)\}$ легко выводится, что поле $\{x(s, t)\}$ является регулярным.

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что мы действительно получаем следующую теорему.

Теорема 3.4. *Для того, чтобы однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, t+\mu)\, d\xi(\lambda, \mu), \tag{95}$$

где $d\xi(\lambda, \mu)$ обладает следующими свойствами:

1) *$\xi(A)$ — случайная величина (при любом измеримом (λ, μ)-множестве A),*

2) *для любых непересекающих (λ, μ)-множеств A_1 и A_2, измеримых по $dK(\lambda)\, d\mu$,*

$$\xi(A_1 + A_2) = \xi(A_1) + \xi(A_2),$$

3) *для любых измеримых множеств A_1 и A_2*

$$\mathbf{M}\{\xi(A_1)\overline{\xi(A_2)}\} = \iint_{A_1 A_2} dK(\lambda)\, d\mu.$$

Здесь $dK(\lambda)$ — некоторая мера, определенная на λ-оси, $g(\lambda, \mu) \in L_2(dK(\lambda)\, d\mu)$ и, кроме того, $g(\lambda, \mu) = 0$, $(\mu \leqslant 0)$.

Теорема 3.5. *Для того, чтобы однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ было сингулярным, необходимо и достаточно выполнение почти всюду на λ-оси (относительно меры $dF_x(\lambda, +\infty)$) следующего условия:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\right|}{1+\mu^2}\, d\mu = +\infty, \tag{96}$$

где $\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}$ — *производная абсолютно непрерывной относительно* $dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu$ *части меры* $dF_x(\lambda, \mu)$ *по мере* $dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu$.

Доказательство. Допустим, что условие теоремы выполнено. Предположим обратное, что поле $\{x(s, t)\}$ не сингулярно, т. е.

$$x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t), \tag{97}$$

где $x_1(s, t)$ и $x_2(s, t)$ являются сингулярной и регулярной компонентами поля $\{x(s, t)\}$, причем $x_2(s, t) \not\equiv 0$. Пусть $F_{x_1}(\lambda, \mu), F_{x_2}(\lambda, \mu)$ — спектральные функции полей $\{x_1(s, t)\}$ и $\{x_2(s, t)\}$. Очевидно, что

$$F_x(\lambda, \mu) = F_{x_1}(\lambda, \mu) + F_{x_2}(\lambda, \mu), \tag{98}$$

и, значит,

$$F_x(\lambda, \infty) = F_{x_1}(\lambda, \infty) + F_{x_2}(\lambda, \infty), \tag{99}$$

и

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{dF_{x_1}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} + \frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}. \tag{100}$$

Так как $\{x_2(s, t)\}$ является регулярным полем, то, по теореме 3.2, мера $dF_{x_2}(\lambda, \mu)$ абсолютно непрерывна относительно меры $dF_{x_2}(\lambda, +\infty)\, d\mu$, и, следовательно, в силу (99), мера $dF_{x_2}(\lambda, \mu)$ также абсолютно непрерывна относительно меры $dF_x(\lambda, +\infty)\, d\mu$. Далее

$$F_{x_2}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} \frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} \frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_{x_1}(\lambda, \infty)\, d\mu + \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} \frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu. \tag{101}$$

Пусть

$$F_{x_1}(\lambda, +\infty) = \int_{-\infty}^{\lambda} T(\lambda)\, dF_{x_2}(\lambda, \infty) + w(\lambda), \tag{102}$$

где $w(\lambda)$ — сингулярная часть меры $F_{x_1}(\lambda, \infty)$ относительно $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$, а $T(\lambda)$ — производная абсолютно непрерывной относительно $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$ части меры $dF_{x_1}(\lambda, \infty)$ по мере $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$. Из (101), (102) вытекает, что

$$\frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\,(1 + T(\lambda)). \tag{103}$$

В силу регулярности поля $\{x_2(s, t)\}$, по теореме 3.2 (2°), для почти всех λ (относительно меры $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$) имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu}\right|}{1 + \mu^2}\, d\mu < +\infty. \tag{104}$$

Отсюда, в силу (103) и (100), нетрудно видеть, что на некотором λ-множестве с положительной $dF_x(\lambda, \infty)$-мерой имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} \right|}{1+\mu^2} d\mu < +\infty. \tag{105}$$

Мы приходим, таким образом, к противоречию, которое и доказывает достаточность условия, указанного в формулировке теоремы.

Для доказательства необходимости этого условия положим

$$\delta_\lambda = \left\{ \lambda;\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} \right|}{1+\mu^2} d\mu < +\infty \right\}. \tag{106}$$

Пусть

$$dF_x(\lambda, \mu) = dG_x(\lambda, \mu) + dH_x(\lambda, \mu), \tag{107}$$

где мера $dG_x(\lambda, \mu)$ является абсолютно непрерывной частью меры $dF_x(\lambda, \mu)$ относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu$, а мера $dH_x(\lambda, \mu)$ — сингулярная часть меры $dF_x(\lambda, \mu)$ относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu$. Тогда существует (λ, μ)-множество M такое, что $dH_x(A) = dH_x(AM)$, для всех измеримых (λ, μ)-множеств A и

$$\iint_M dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu = 0. \tag{108}$$

Обозначим через N (λ, μ)-множество $\overline{M} \cdot \delta_\lambda \otimes (-\infty, \infty)$ и положим

$$x_\nu(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)}\, dZ_{x_\nu}(\lambda, \mu), \quad (\nu = 1, 2), \tag{109}$$

где $dZ_{x_\nu}(A)$ $(\nu = 1, 2)$ при любом измеримом (λ, μ)-множестве A определены следующим образом:

$$Z_{x_1}(A) = Z_x(A\overline{N}),\ Z_{x_2}(A) = Z_x(AN). \tag{110}$$

В таком случае

$$x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t), \tag{111}$$

причем поля $\{x_1(s, t)\}$, $\{x_2(s, t)\}$ взаимно ортогональны друг другу. Если теперь мы сможем доказать, что поле $\{x_2(s, t)\}$ является регулярным, то из сингулярности поля $\{x(s, t)\}$ будет следовать, что

$$x_2(s, t) \equiv 0, \tag{112}$$

т. е. что

$$\iint_N dF_x(\lambda, \mu) = 0. \tag{113}$$

Отсюда, в силу (107) и (108), получаем

$$\int_{\delta_\lambda} dF_x(\lambda, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} d\mu = 0. \tag{114}$$

Но по самому определению λ-множества δ_λ равенство (114) может иметь место лишь, если $dF_x(\lambda, \infty)$-мера множества δ_λ равна нулю, что и требовалось доказать.

Итак, нам остается только доказать регулярность поля $\{x_2(s, t)\}$. Воспользуемся тем, что при любом измеримом (λ, μ)-множестве A

$$F_{x_2}(A) = \iint_A dF_{x_2}(\lambda, \mu) = \iint_{AN} dF_x(\lambda, \mu) = \iint_{A\overline{M}\cdot\delta_\lambda\otimes(-\infty,\infty)} dF_x(\lambda, \mu) =$$

$$= \iint_{A\cdot\overline{M}\cdot\delta_\lambda\otimes(-\infty,\infty)} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint_{A\cdot\delta_\lambda\otimes(\infty,\infty)} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint_A l(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu, \tag{115}$$

где

$$l(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1, & (\lambda, \mu) \in \delta_\lambda \otimes (-\infty, \infty), \\ 0, & (\lambda, \mu) \in \overline{\delta}_\lambda \otimes (-\infty, \infty). \end{cases} \tag{116}$$

Из (115) следует

$$F_{x_2}(\lambda, \infty) = \int_{-\infty}^{\lambda} dF_x(\lambda, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} l(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} v(\lambda)\, dF_x(\lambda, \infty), \tag{117}$$

где

$$v(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} l(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} d\mu, \tag{118}$$

т. е.

$$v(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} d\mu, & \lambda \in \delta_\lambda \\ 0, & \lambda \in \overline{\delta}_\lambda. \end{cases} \tag{119}$$

Положим, теперь,

$$l_1(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1, & \text{при } v(\lambda) = 0, \\ \dfrac{1}{v(\lambda)} l(\lambda, \mu) \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}, & \text{при } v(\mu) > 0. \end{cases} \tag{120}$$

Тогда, в силу (115), (117)

$$F_{x_2}(A) = \iint_A l_1(\lambda, \mu)\, v(\lambda)\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint_A l_1(\lambda, \mu)\, dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu. \tag{121}$$

Отсюда вытекает, что мера $dF_{x_2}(\lambda, \mu)$ абсолютно непрерывна относительно меры $dF_{x_2}(\lambda, \infty)\,d\mu$, причем

$$\frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\,d\mu} = l_1(\lambda, \mu); \tag{122}$$

учитывая, далее, (116), (119), (120) и (106), получаем

$$\frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\,d\mu} = \begin{cases} 1, & \lambda \in \overline{\delta}_\lambda \\ \dfrac{1}{v(\lambda)} \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu}, & \lambda \in \delta_\lambda. \end{cases} \tag{123}$$

При $\lambda \in \delta_\lambda$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{1}{v(\lambda)} \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu + \pi\,|\log v(\lambda)| < +\infty.$$

Так как $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$-мера λ-множества $\overline{\delta}_\lambda$ равна нулю, то почти всюду (относительно меры $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$) имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\mu, \infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu < +\infty. \tag{124}$$

Поэтому, согласно теореме 3.3, поле $\{x_2(s, t)\}$ регулярно, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.6. *Пусть* $\{x(s, t)\}$ *— несингулярное однородное случайное поле, а* $\{x_1(s, t)\}$ *и* $\{x_2(s, t)\}$ *— сингулярная и регулярная компоненты поля* $\{x(s, t)\}$. *Тогда при любом измеримом* (λ, μ)*-множестве* A

$$F_{x_1}(A) = \int\int_{AN} dF_x(\lambda, \mu), \tag{125}$$

$$F_{x_2}(A) = \int\int_{AN} dF_x(\lambda, \mu). \tag{126}$$

Здесь

1) $N = \overline{M} \cdot \delta_\lambda \otimes (-\infty, \infty)$, (127)

2) $\delta_\lambda = \left\{\lambda;\ \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu < +\infty\right\}$, (128)

3) M — такое (λ, μ)-множество, что

а) $\int\int_M dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu = 0$, (129)

б) при любом измеримом (λ, μ)-множестве A,

$$dH_x(A) = dH_x(AM), \tag{130}$$

где мера $dH_x(\lambda, \mu)$ является сингулярной частью меры $dF_x(\lambda, \mu)$ относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu$.

Доказательство. Существуют функции $l_1(\lambda, \mu)$ и $l_2(\lambda, \mu)$ такие, что

$$F_{x_\nu}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} l_\nu(\lambda, \mu)\, dF_x(\lambda, \mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} l_\nu(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} l_\nu(\lambda, \mu)\, dH_x(\lambda, \mu) \quad (\nu = 1, 2). \tag{131}$$

Причем

$$\begin{cases} l_1(\lambda, \mu) \cdot l_2(\lambda, \mu) = 0, \\ l_1(\lambda, \mu) + l_2(\lambda, \mu) = 1. \end{cases} \tag{132}$$

Так как поле $\{x_2(s, t)\}$ — регулярно, то по теореме 3.2, мера $dF_{x_2}(\lambda, \mu)$ абсолютно непрерывна относительно меры $dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu$, и, следовательно, также абсолютно непрерывна относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu$. Отсюда, в силу (131), следует

$$F_{x_2}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} l_2(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu, \tag{133}$$

т. е.

$$\frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = l_2(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}. \tag{134}$$

Если мы обозначим через $b(\lambda)$ производную $\dfrac{dF_x(\lambda, \infty)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)}$, то, в силу (133), будем иметь

$$F_{x_2}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} l_2(\lambda, \mu)\, b(\lambda) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu, \tag{135}$$

т. е. почти всюду по $dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu$ имеет место равенство

$$\frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu} = l_2(\lambda, \mu)\, b(\lambda) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}. \tag{136}$$

Положим $\eta_{l_\lambda} = \{\lambda;$ равенство (136) имеет место для почти всех $\mu\}$,

$$\zeta_\lambda = \left\{\lambda;\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu}\right|}{1 + \mu^2}\, d\mu < +\infty\right\}, \tag{137}$$

$$\xi_\lambda = \eta_{l_\lambda} \zeta_\lambda.$$

Ясно, что $\xi_\lambda \subseteq \delta_\lambda$ и, в силу теоремы 3.2, $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$-мера множества $\overline{\xi_\lambda}$ равна нулю. Отсюда мы заключаем, что

$$\iint_{\overline{\xi_\lambda} \otimes (-\infty, \infty)} dF_{x_2}(\lambda, +\infty)\, d\mu = 0 \tag{138}$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\overline{\xi}_\lambda \otimes (-\infty,\ \infty)} dF_{x_2}(\lambda, \mu) = 0. \tag{138'}$$

Из (138') вытекает, что на множестве $\overline{\xi}_\lambda \otimes (-\infty, \infty)$ почти всюду относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu$ имеет место равенство

$$\frac{dF_{x_2}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = 0, \tag{139}$$

т. е.

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{dF_{x_1}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} \tag{140}$$

(и, значит, $l_2(\lambda, \mu) = 0$). Так как на множестве $\overline{\xi}_\lambda$ меры $dF_{x_1}(\lambda, \infty)$ и $dF_x(\lambda, \infty)$ равносильны, то равенство (140) имеет место на множестве $\overline{\xi}_\lambda \otimes (-\infty, \infty)$ также почти всюду относительно меры $dF_{x_1}(\lambda, \infty)\, d\mu$.

При $\lambda \in \delta_\lambda - \xi_\lambda$ имеет место равенство

$$\frac{dF_{x_1}(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{dF_{x_1}(\lambda, \mu)}{dF_{x_1}(\lambda, \infty)\, d\mu}, \tag{141}$$

из чего, в силу (140), следует

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{dF_{x_1}(\lambda, \mu)}{dF_{x_1}(\lambda, \infty)\, d\mu}. \tag{142}$$

Отсюда, по определению λ-множества δ_λ, находим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \log \dfrac{dF_{x_1}(\lambda, \mu)}{dF_{x_1}(\lambda, \infty)\, d\mu} \right|}{1 + \mu^2}\, d\mu < +\infty, \quad (\lambda \in \delta_\lambda - \xi_\lambda). \tag{143}$$

Поэтому, в силу сингулярности поля $\{x_1(s, t)\}$, по теореме 3.5 заключаем, что $dF_{x_1}(\lambda, \infty)$-мера и также $dF_x(\lambda, \infty)$-мера множества $\delta_\lambda - \xi_\lambda$ равна нулю. Но теперь из (132), (136) и (137), по определению множества ξ_λ вытекает, что при фиксированном $\lambda \in \xi_\lambda$ почти всюду на $-\infty < \mu < \infty$

$$l_2(\lambda, \mu) = 1. \tag{144}$$

Тогда, при любом измеримом (λ, μ)-множестве A в силу (133), (144) имеем

$$F_{x_2}(A) = F_{x_2}(A \cdot \xi_\lambda \otimes (-\infty, \infty)) = \iint\limits_{A \cdot \xi_\lambda \otimes (-\infty,\ \infty)} l_2(\lambda, \mu) \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} \times$$

$$\times\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu = \iint\limits_{A \cdot \xi_\lambda \otimes (-\infty,\ \infty)} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint\limits_{A \cdot \delta_\lambda \otimes (-\infty,\ \infty)} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint\limits_{\overline{M} \cdot A \cdot \delta_\lambda \otimes (-\infty,\ \infty)} dF_x(\lambda, \mu) = \iint\limits_{AN} dF_x(\lambda, \mu), \tag{145}$$

и, следовательно,

$$F_{x_1}(A) = F_x(A) - F_{x_2}(A) = \iint\limits_{A\bar{N}} dF_x(\lambda, \mu). \tag{146}$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие:

1°. $$dF_{x_2}(\lambda, \infty) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} v(\lambda)\, dF_x(\lambda, \infty), \tag{147}$$

где

$$v(\lambda) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} d\mu, & \lambda \in \delta_\lambda, \\ 0, & \lambda \in \bar{\delta}_\lambda. \end{cases} \tag{148}$$

2°. *Почти всюду относительно меры* $dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu$ *имеет место равенство*

$$\frac{dF_{x_3}(\lambda, \mu)}{dF_{x_3}(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{1}{v(\lambda)} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}. \tag{149}$$

§ 4. Каноническое представление регулярного однородного случайного поля

В предыдущем параграфе мы уже видели, что каждое регулярное однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ можно представить в виде

$$x(s, t) = \iint\limits_{\substack{-\infty<\mu<t \\ -\infty<\lambda<\infty}} e^{i\lambda s} g(\lambda, t-\mu)\, d\xi(\lambda, \mu), \tag{150}$$

где $d\xi(\lambda, \mu)$ обладает следующими свойствами:

1) при любом измеримом (λ, μ)-множестве A, $\xi(A)$ является случайной величиной;

2) для любых непересекающих измеримых (λ, μ)-множеств A_1 и A_2

$$\xi(A_1 + A_2) = \xi(A_1) + \xi(A_2);$$

3) для любых измеримых (λ, μ)-множеств A_1 и A_2

$$\mathbf{M}[\xi(A_1)\,\overline{\xi(A_2)}] = \iint\limits_{A_1 A_2} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu,$$

а функция $g(\lambda, \mu) \in L_2(dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu)$.

Очевидно, что такое представление не единственно. В настоящем параграфе мы рассмотрим один важный класс представлений этого рода, называемый «класс канонических представлений регулярного однородного случайного поля», который играет важную роль в теории линейного экстраполирования.

Определение. Представление (150) регулярного однородного случайного поля $\{x(s, t)\}$ назовем *каноническим* представлением, если при

любом t

$$H_x(t) = H_\xi(t), \tag{151}$$

где $H_\xi(t)$ — минимальное линейное замкнутое пространство, содержащее все случайные величины $\xi(A)$, для которых $A \subseteq \begin{pmatrix} -\infty < \lambda < \infty \\ \mu \leqslant t \end{pmatrix}$.

Найдем теперь все возможные канонические представления регулярного однородного случайного поля. С этой целью нам понадобятся некоторые леммы. Доказательства этих лемм аналогичны доказательствам соответствующих предложений теории стационарных процессов (см. [5]) и будут здесь опущены.

Лемма 4.1. *Для того, чтобы представление* (150) *регулярного однородного случайного поля* $\{x(s, t)\}$ *было каноническим, необходимо и достаточно чтобы функция* $g(\lambda, \mu)$ *обладала следующим свойством:*

Не существует такой функции $h(\lambda, \mu)$, *что*

$$\text{(а)} \qquad 0 < \int_{-\infty}^{\infty} dF_x(\lambda, \infty) \int_0^{\infty} |h(\lambda, \mu)|^2 \, d\mu < +\infty, \tag{152}$$

(б) *для почти всякого* (*относительно меры* $dF_x(\lambda, \infty)$) *значения* λ *имеет место равенство*

$$\int_0^{\infty} g(\lambda, \mu) h(\lambda, \mu + u) \, d\mu = 0, \tag{153}$$

почти всюду на полу-оси $u > 0$.

Лемма 4.2. *Для того, чтобы функция* $g(\lambda, \mu)$ *обладала свойством, указанным в лемме* 4.1, *необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде*

$$g(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} e^{i\mu u} G_0(\lambda, u) \, du,$$

где

$$G_0(\lambda, u) = \lim_{v \to 0^-} G_0(\lambda, u + iv),$$

$$G_0(\lambda, \omega) = k(\lambda) \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \mu\omega}{\mu - \omega} \frac{\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}}{1 + \mu^2} \, d\mu \right\} \quad (\operatorname{Im}(\omega) < 0),$$

а $k(\lambda)$ — *некоторая измеримая комплексная функция с* $|k(\lambda)| = 1$.

Лемма 4.3. *Пусть для любого измеримого* (λ, μ)*-множества* S

$$\xi^*(S) = \iint_S \frac{dZ_x(\lambda, \mu)}{G_0(\lambda, \mu)}, \tag{154}$$

где $G_0(\lambda, \mu)$ — *функция, фигурирующая в условиях леммы* 4.2.

Тогда

1) $\xi^*(S)$ — *случайная величина,*

2) *если* S_1 *и* S_2 *не пересекаются между собой, то*

$$\xi^*(S_1 + S_2) = \xi^*(S_1) + \xi^*(S_2),$$

3) *для любых измеримых множеств* S_1, S_2

$$\mathbf{M}[\xi^*(S_1)\overline{\xi^*(S_2)}] = \iint_{S_1 \cdot S_2} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu,$$

4)
$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)}\, G_0(\lambda, \mu)\, d\xi^*(\lambda, \mu). \tag{155}$$

Лемма 4.4. *Пусть при любом измеримом* (λ, μ)*-множестве* S,

$$\xi(S) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{S_\lambda} e^{it\mu}\, dt\right\} d\xi^*(\lambda, \mu), \tag{156}$$

где $S_\lambda = \{\mu;\ (\lambda, \mu) \in S\}$. *Тогда*

(1°) а) $\xi(S)$ — *случайная величина,*

б) *если* S_1, S_2 — *непересекающие множества, то*

$$\xi(S_1 + S_2) = \xi(S_1) + \xi(S_2),$$

в) *для любых измеримых множеств* S_1 *и* S_2

$$\mathbf{M}[\xi(S_1)\overline{\xi(S_2)}] = \iint_{S_1 \cdot S_2} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu;$$

(2°)
$$\xi^*(S) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{S_\lambda} e^{-it\mu}\, dt\right\} d\xi(\lambda, \mu); \tag{157}$$

(3°) *если* $f^*(\lambda, \mu) \in L_2(dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu)$ *и*

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{l.i.m.}_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} e^{-i\mu t} f^*(\lambda, t)\, dt, \tag{158}$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\lambda, \mu)\, d\xi^*(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \mu)\, d\xi(\lambda, \mu). \tag{159}$$

Кроме того, почти очевидной является следующая

Лемма 4.5. *Пусть* $\{x(s, t)\}$ — *однородное случайное поле и*

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s, t, \lambda, \mu)\, d\xi_\nu(\lambda, \mu) \qquad (\nu = 1, 2), \tag{160}$$

где $\xi_\nu(\lambda, \mu)$ $(\nu = 1, 2)$ *обладает следующими свойствами:*

1) *для любого измеримого* (λ, μ)*-множества* A, $\xi_\nu(A)$, $(\nu = 1, 2)$ — *случайные величины,*

2) *если* A_1, A_2 — *непересекающие множества, то*

$$\xi_\nu(A_1 + A_2) = \xi_\nu(A_1) + \xi_\nu(A_2), \quad (\nu = 1, 2)$$

3) *для любых измеримых множеств* A_1 *и* A_2

$$\mathbf{M}[\xi_\nu(A_1)\overline{\xi_\nu(A_2)}] = \iint\limits_{A_1 A_2} dp(\lambda, \mu),$$

где $dp(\lambda, \mu)$ — *некоторая положительная мера, определенная на* (λ, μ)-*плоскости,*

4) $H_{\xi_\nu} = H_x \quad (\nu = 1, 2)$,

где H_{ξ_ν} — *минимальное линейное замкнутое пространство, содержащее все величины* $\xi_\nu(A)$.

Тогда, при любом измеримом множестве A

$$\xi_1(A) = \xi_2(A), \tag{161}$$

т. е.

$$d\xi_1(\lambda, \mu) = d\xi_2(\lambda, \mu). \tag{162}$$

Из этих лемм непосредственно следует следующая теорема:

Теорема 4.1. *Если* $\{x(s, t)\}$ — *регулярное однородное случайное поле, то все возможные канонические представления этого поля мы можем определять следующим образом:*

$$x(s, t) = \iint\limits_{\substack{-\infty < \lambda < \infty \\ \mu \leqslant t}} e^{i\lambda s}\, g(\lambda, t - \mu)\, d\xi(\lambda, \mu). \tag{163}$$

Здесь

(1°)

$$g(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.}_{N \to +\infty} \int\limits_{-N}^{N} e^{i\mu u} G_0(\lambda, u)\, du, \tag{164}$$

где

$$G_0(\lambda, u) = \lim_{v \to 0^-} G_0(\lambda, u + iv),$$

$$G_0(\lambda, \omega) = k(\lambda) \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \mu\omega}{\mu - \omega} \frac{\log \dfrac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}}{1 + \mu^2}\, d\mu\right\} \quad (\operatorname{Im}(\omega) < 0), \tag{165}$$

$k(\lambda)$ — *некоторая измеримая комплексная функция с* $|k(\lambda)| = 1$;

(2°) *функция* $\xi(\lambda, \mu)$ *определяется по формулам* (156), (154).

§ 5. Линейное экстраполирование однородного поля

Теперь мы легко можем получить формулу, выражающую среднюю квадратичную ошибку экстраполирования $\rho_x^2(t)$ (см. § 1) через спектральную функцию однородного поля $x(s, t)$.

Обозначим через $\{x_2(s, t)\}$ регулярную компоненту несингулярного однородного случайного поля $\{x(s, t)\}$. Легко видеть, что

$$\rho_x^2(t) = \rho_{x_2}^2(t). \tag{166}$$

Так как поле $\{x_2(s, t)\}$ — регулярно, то, используя каноническое представление (163) поля $\{x_2(s, t)\}$, мы находим:

$$\rho^2_{x_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t |g_2(\lambda, t-\mu)|^2\, d\mu\, dF_{x_2}(\lambda, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t |g_2(\lambda, \mu)|^2\, d\mu\, dF_{x_2}(\lambda, \infty), \tag{167}$$

где функция $g_2(\lambda, \mu)$ определяется из отношений:

$$g_2(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{l.i.m.}_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} e^{i\mu u}\, G_2(\lambda, u)\, du,$$

$$G_2(\lambda, u) = \lim_{v\to 0^-} G_2(\lambda, u+iv),$$

$$G_2(\lambda, \omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\mu\omega}{\mu-\omega}\,\frac{\log\dfrac{dF_{x_2}(\lambda,\mu)}{dF_{x_2}(\lambda,\infty)\,d\mu}}{1+\mu^2}\,d\mu\right\}, \quad (\text{Im}(\omega)<0).$$

Из (167), в силу (147)—(149), легко получаем

$$\begin{aligned}\rho^2_{x_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t |g_2(\lambda, \mu)|^2\, d\mu\right) v(\lambda)\, dF_x(\lambda, \infty)\\ &= \int_{\delta_\lambda}\int_0^t |g_2(\lambda, \mu)|^2\, v(\lambda)\, d\mu\, dF_x(\lambda, \infty)\\ &= \int_{\delta_\lambda}\int_0^t |g_0(\lambda, \mu)|^2\, d\mu\, dF_x(\lambda, \infty),\end{aligned} \tag{168}$$

где

$$\delta_\lambda = \left\{\lambda;\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\log\dfrac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,\infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu < +\infty\right\}, \tag{169}$$

а функция $g_0(\lambda, \mu)$ (при $\lambda \in \delta_\lambda$) определяется из следующих отношений:

$$\begin{cases} g_0(\lambda, \mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{l.i.m.}_{N\to+\infty}\displaystyle\int_{-N}^{N} e^{i\mu u}\, G_0(\lambda, u)\, du,\\ G_0(\lambda, u) = \displaystyle\lim_{v\to 0^-} G_0(\lambda, u+iv),\\ G_0(\lambda, \omega) = \exp\left\{-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1+\mu\omega}{\mu-\omega}\,\dfrac{\log\dfrac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,\infty)\,d\mu}}{1+\mu^2}\,d\mu\right\}, \quad (\text{Im}(\omega)<0).\end{cases} \tag{170}$$

Отсюда, в силу (166), будем иметь

Теорема 5.1.

$$\rho^2_x(t) = \int_{\delta_\lambda}\int_0^t |g_0(\lambda, \mu)|^2\, d\mu\, dF_x(\lambda, \infty), \tag{171}$$

где функция $g_0(\lambda, \mu)$ *(при* $\lambda \in \delta_\lambda$*) определяется из соотношений* (170), *а* λ*-множество* δ_λ *определяется равенством* (169).

Теорема 5.1 является обобщением на случай однородных полей классических результатов об экстраполировании стационарных процессов, найденных А. Н. Колмогоровым [2,3] и М. Г. Крейном [11].

§ 6. Однородное случайное поле марковского типа

Определение. Однородное случайное поле $\{x(s, t)\}$ будем называть *однородным случайным полем марковского типа*, если при любом $l > 0$

$$\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t) \in G_x(t-l), \tag{172}$$

где $G_x(t-l)$ означает минимальное линейное замкнутое подпространство, содержащее все величины $x(s', t-l)$, для которых $-\infty < s' < \infty$.

Цель настоящего параграфа заключается в установлении спектральной характеристики однородного случайного поля марковского типа. Прежде всего мы будем рассматривать регулярное поле марковского типа, и лишь затем перейдем к изучению общего случая.

Пусть, теперь, $\{x(s, t)\}$ — регулярное поле. По теореме 4.1 имеем каноническое представление этого поля:

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, t-\mu)\, d\xi(\lambda, \mu). \tag{173}$$

Отсюда, в частности, легко получить, что любой элемент подпространства $G_x(t-l)$ будет представлен в виде

$$\int_{-\infty}^{-l} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)\, g(\lambda, t-l-\mu)\, d\xi(\lambda, \mu), \tag{173'}$$

где

$$\psi(\lambda) \in L_2(dF_x(\lambda, \infty)).$$

В силу (173)

$$\operatorname{proj}_{H_{(t-l)}} x(s, t) = \int_{-\infty}^{t-l} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, t-\mu)\, d\xi(\lambda, \mu). \tag{174}$$

Из (173') и (174) мы заключаем, что $\{x(s, t)\}$ является полем марковского типа, тогда и только тогда, когда для всякого $l > 0$ существует функция $\varphi_l(\lambda) \in L_2(dF_x(\lambda, \infty))$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{t-l} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, t-\mu) = \int_{-\infty}^{t-l} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(\lambda)\, e^{is\lambda} g(\lambda, t-l-\mu)\, d\xi(\lambda, \mu), \tag{175}$$

(мы пишем $\varphi_l(\lambda)\, e^{is\lambda}$ вместо $\psi_l(\lambda, s)$ в силу однородности поля по переменному s). Равенство (175) эквивалентно также равенству

$$\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda+(t-l)\mu]}\, \varphi_l(\lambda)\, dZ_x(\lambda, \mu). \tag{175'}$$

Если $\{x, (s, t)\}$ — регулярное поле марковского типа, то для всякого $l > 0$ на множестве $-\infty < \lambda < \infty$, $\mu < t-l$ почти всюду (относительно

меры $dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu$) имеет место равенство

$$g(\lambda, t-\mu) = \varphi_l(\lambda)\, g(\lambda, t-l-\mu). \tag{176}$$

Это значит, что на множестве $-\infty < \lambda < \infty$, $0 < \mu$, почти всюду (относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu$) имеет место равенство

$$g(\lambda, \mu + l) = \varphi_l(\lambda)\, g(\lambda, \mu), \tag{177}$$

из чего, в силу (164), (165) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(\lambda)\, |g(\lambda, \mu)|^2\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, \mu + l)\, \overline{g(\lambda, \mu)}\, d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{il\mu}\, |G_0(\lambda, \mu)|^2\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{il\mu}\, \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, d\mu, \tag{178}$$

и далее

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda, \mu)|^2\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\lambda, \mu)|^2\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, d\mu. \tag{179}$$

Так как мера $dF_x(\lambda, \mu)$ абсолютно непрерывна относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu$, то последний интеграл равенства (179) равняется единице почти всюду на $-\infty < \lambda < \infty$ (относительно $dF_x(\lambda, \infty)$). Поэтому из (178), (179) вытекает для почти всех λ (относительно $dF_x(\lambda, \infty)$)

$$\varphi_l(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{il\mu}\, \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}\, d\mu. \tag{180}$$

В самом деле, мы можем считать функцию $\varphi_l(\lambda)$ интегралом, стоящим в правой части равенства (180). Теперь равенство (180) показывает, что при фиксированном λ функция $\varphi_l(\lambda)$ (как функция от l) является характеристической функцией, отвечающей плотности $\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}$. Тогда функция $\varphi_l(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi_l(\lambda) \text{ — непрерывная и эрмитовская функция,} \\ &2)\ |\varphi_l(\lambda)| \leqslant 1 \text{ и } \varphi_0(\lambda) = 1, \\ &3)\ \lim_{l \to \infty} \varphi_l(\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{181}$$

Далее, (177) будет иметь место для почти всякого λ (относительно меры $dF_x(\lambda, \infty)$) на множестве $\mu > 0$, $l > 0$ (почти всюду относительно меры $d\mu\, dl$), отсюда

$$4)\ \varphi_{nl}(\lambda) = [\varphi_l(\lambda)]^n, \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots, \\ 0 < l < \infty \end{pmatrix}$$

На основании свойств 1)—4) функции $\varphi_l(\lambda)$ мы убедимся в том, что

$$\varphi_l(\lambda) = e^{c(\lambda) l}, \tag{182}$$

где

(1) $c(\lambda)$ — комплексная измеримая функция

(2) $\operatorname{Re}\{c(\lambda)\} < 0$.

Пусть $c(\lambda) = -\alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$ $(\alpha(\lambda) > 0)$. Тогда из (180), (182) получаем:

$$\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\lambda)|l| - i\beta(\lambda) l - i\mu l}\, dl =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + [\mu + \beta(\lambda)]^2} = -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) + i\mu|^2}. \tag{183}$$

До сих пор мы получили конкретное представление функции $\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}$ и $\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t)$. Для того, чтобы полностью определить регулярное однородное случайное поле $x(s, t)$, нам еще нужно найти явное представление функции $g(\lambda, \mu)$.

Действительно, из (181), (182) нетрудно видеть, что существует функция $w(\lambda) = g(\lambda; 0)$ такая, что

$$g(\lambda, \mu) = w(\lambda)\, e^{c(\lambda)\mu}. \tag{184}$$

Теперь имеем

$$G(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(\lambda, u)\, e^{-i\mu u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} w(\lambda)\, e^{[c(\lambda) - i\mu]u}\, du = \frac{w(\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\mu - c(\lambda)}. \tag{185}$$

Вспомним, что

$$G(\lambda, \omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \mu\omega}{\mu - \omega} \frac{\log \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu}}{1 + \mu^2}\, d\mu\right\} \quad (\operatorname{Im}(\omega) < 0),$$

вследствие чего из (183) следует

$$G(\lambda, \omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \mu\omega}{\mu - \omega} \frac{\log \frac{1}{\pi} \frac{-\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2}}{1 + \mu^2}\, d\mu\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{-\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \mu\omega}{\mu - \omega} \frac{\log \frac{1}{|c(\lambda) - i\mu|^2}}{1 + \mu^2}\, d\mu\right\}. \tag{186}$$

С другой стороны, функция $\frac{1}{i\omega - c(\lambda)}$, определенная на полуплоскости $\operatorname{Im}(\omega) < 0$, принадлежит классу $\mathfrak{H}_2$ (классу Риса) (см. [10]), причем легкий подсчет показывает, что эта функция имеет следующее явное параметрическое представление:

$$\frac{1}{i\omega - c(\lambda)} = \frac{|1 - c(\lambda)|}{1 - c(\lambda)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \mu\omega}{\mu - \omega} \frac{\log \frac{1}{|c(\lambda) - i\mu|}}{1 + \mu^2}\, d\mu\right\}. \tag{187}$$

Отсюда, в силу (186) и (185), мы заключаем

$$w(\lambda) = \sqrt{-2\mathrm{Re}\,\{c(\lambda)\}}\,\frac{1-c(\lambda)}{|1-c(\lambda)|} \tag{188}$$

и, следовательно,

$$g(\lambda, \mu) = \sqrt{-2\mathrm{Re}\,\{c(\lambda)\}}\,\frac{1-c(\lambda)}{|1-c(\lambda)|}\,e^{c(\lambda)\mu}. \tag{189}$$

Полученные нами результаты составляют содержание следующей теоремы:

Теорема 6.1. *Если* $\{x(s, t)\}$ *— регулярное однородное случайной поле марковского типа, то*

(1°) *при любом измеримом* (λ, μ)*-множестве* S

$$F_x(S) = \iint_S \frac{1}{\pi}\,\frac{-\mathrm{Re}\,\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2}\,dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu, \tag{190}$$

где

(а) $c(\lambda)$ *— измеримая комплексная функция с* $\mathrm{Re}\,\{c(\lambda)\} < 0$,

(б) *функция* $c(\lambda)$ *определяется из соотношения*

$$e^{c(\lambda)l} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{il\mu}\,\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_x(\lambda, \infty)\,d\mu}\,d\mu; \tag{191}$$

(2°)

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\,g_0(\lambda, t-\mu)\,d\xi_0(\lambda, \mu), \tag{192}$$

где

(а) $g_0(\lambda, \mu) = \sqrt{-2\mathrm{Re}\,\{c(\lambda)\}}\,\frac{1-c(\lambda)}{|1-c(\lambda)|}\,e^{c(\lambda)\mu}, \quad (\mu \geqslant 0)$ (193)

(б) *Функция* $\xi_0(\lambda, \mu)$ *определяется из соотношений*

$$\xi_0(S) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{S_\lambda} e^{it\mu}\,dt\right\} d\xi_0^*(\lambda, \mu),$$

$$(S_\lambda = \{\mu; (\lambda, \mu) \in S\})$$

$$\xi_0^*(S) = \iint_S \frac{dZ_x(\lambda, \mu)}{G_0(\lambda, \mu)},$$

(*здесь* $G_0(\lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{l.i.m.}_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} e^{-i\mu u}\,g_0(\lambda, u)\,du$);

(3°)

$$\mathrm{proj}_{H_x(t-l)}\,x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda+(t-l)\mu]}\,e^{c(\lambda)l}\,dZ_x(\lambda, \mu). \tag{194}$$

Теорема 6.2. *Пусть* $F_x(\lambda, \mu)$ *— спектральная функция поля* $\{x(s, t)\}$. *Если при любом измеримом* (λ, μ)*-множестве* S

$$F_x(S) = \iint_S g(\lambda)\,\frac{-\mathrm{Re}\,\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2}\,dG(\lambda)\,d\mu, \tag{195}$$

где

а) $g(\lambda) \geqslant 0$ *и* $g(\lambda) \in L_1(dG(\lambda))$;

б) $dG(\lambda)$ — *некоторая конечная мера, определенная на* λ*-оси*;

в) $c(\lambda)$ — *измеримая комплексная функция с* $\operatorname{Re}\{c(\lambda)\} \leqslant 0$,

то $\{x(s, t)\}$ *является регулярным полем марковского типа.*

Доказательство. В силу равенства (195), по теореме 3.3, легко доказать регулярность поля $\{x(s, t)\}$. Воспользовавшись теперь тождеством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\mu}}{|\gamma - i\mu|^2} d\mu = \frac{\pi}{|\alpha|} e^{-|t\alpha| - it\beta} \quad (\gamma = \alpha + i\beta), \tag{196}$$

легко найдем

$$\mathbf{M}\left[x(s, t) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} e^{-tl\mu} e^{c(\lambda)l} dZ_x(\lambda, \mu), \overline{x(s', t')}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(s-s')\lambda + (t-t')\mu]} \{1 - e^{[c(\lambda) - i\mu]l}\} g(\lambda) \frac{\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2} dG(\lambda) d\mu = 0. \tag{197}$$

Это означает, что $\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t)$ имеет вид (175′), т. е. принадлежит подпространству $G_x(t-l)$ и, следовательно, $\{x(s, t)\}$ является полем марковского типа. Теорема доказана.

Заметим еще, что из сравнения теорем 6.1 и 6.2 немедленно вытекает, что из равенства (195) должно вытекать соотношение $dF_x(\lambda, +\infty) = \pi g(\lambda) dG(\lambda)$, справедливость которого, разумеется, легко может быть проверена и непосредственным интегрированием подинтегральной функции в (195) по μ от $-\infty$ до $+\infty$.

Теорема 6.3. *Для того, чтобы поле* $\{x(s, t)\}$ *являлось сингулярным полем марковского типа, необходимо и достаточно, чтобы существовала комплексная измеримая функция* $c(\lambda)$, *с* $\operatorname{Re}\{c(\lambda)\} = 0$ *такая, что*

$$F_x(\{(\lambda, \mu);\ i\mu \neq c(\lambda)\}) = 0. \tag{198}$$

Доказательство. Для доказательства достаточности теоремы надо лишь доказать, что из (198) вытекает выполнение равенства

$$x(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda + (t-l)\mu]} e^{c(\lambda)l} dZ_x(\lambda, \mu), \tag{199}$$

(так как в сингулярном случае $\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t) \equiv x(s, t)$). Но, в силу (198),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{[c(\lambda) - i\mu]l}|^2 dF_x(\lambda, \mu) = 0, \tag{200}$$

что и значит, что равенство (199) выполнено. Таким образом, достаточность теоремы доказана.

Для доказательства необходимости теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма 6.1. *Пусть* $dF(\lambda, \mu)$ — *конечная мера, определенная для всех борелевских множеств на* (λ, μ)-*плоскости. Если*

$$F(\{(\lambda, \mu);\quad \mu \neq p(\lambda)\}) = 0, \tag{201}$$

то функция $p(\lambda)$ *является измеримой функцией (относительно меры* $dF(\lambda, \infty)$*).*

Доказательство. Докажем, что при любом вещественном α множество $\{\lambda;\ p(\lambda) \geqslant \alpha\}$ измеримо (относительно меры $dF(\lambda, \infty)$). Для этого воспользуемся равенством:

$$\{(\lambda, \mu);\ p(\lambda) \geqslant \alpha\} = \{(\lambda, \mu);\ \mu \geqslant \alpha\} -$$
$$- \{(\lambda, \mu);\ \mu \geqslant \alpha,\ p(\lambda) < \alpha\} + \{(\lambda, \mu);\ \mu < \alpha,\ p(\lambda) \geqslant \alpha\}. \tag{202}$$

В силу (201), $dF(\lambda, \mu)$-мера второго и третьего множества, стоящего в правой части (202), равна нулю, а первое множество в первой части (202) является просто полуплоскостью. Поэтому (λ, μ)-множество, стоящее на левой части равенства (202), является $dF(\lambda, \mu)$-измеримым, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к доказательству необходимости нашей теоремы. Предположим, что поле $\{x(s, t)\}$ — сингулярное поле марковского типа. Тогда существует комплексная функция $\varphi_l(\lambda)$ такая, что

$$1)\ \varphi_l(\lambda) \in L_1(dF_x(\lambda, \infty));$$
$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{-il\mu}\varphi_l(\lambda)|^2\, dF_x(\lambda, \mu) = 0. \tag{203}$$

Положим

$$A_l = \{(\lambda, \mu);\quad 1 - e^{-il\mu}\varphi_l(\lambda) = 0\}. \tag{204}$$

Из (203) следует, что $F_x(\overline{A}_l) = 0$, и, в частности,

$$F_x(\overline{A}_{\sqrt{2}}) = 0, \quad F_x(\overline{A}_1) = 0, \tag{205}$$

так что и

$$F_x(\overline{A_1 A_{\sqrt{2}}}) = 0. \tag{206}$$

Фиксируем теперь значение λ; тогда, по определению A_l, если $(\lambda, \mu_1) \in A_l$ и $(\lambda, \mu_2) \in A_l$, то обязательно $\mu_1 - \mu_2 = \frac{2n\pi}{l}$, где n — целое число. Отсюда ясно, что при любом фиксированном λ множество $\{\mu;\ (\lambda, \mu) \in A_1 A_{\sqrt{2}}\}$ содержит не более одной точки. Иначе говоря, все точки множества $A_1 A_{\sqrt{2}}$ расположены на одной кривой $\mu = p(\lambda)$. Положим теперь

$$c(\lambda) = ip(\lambda), \tag{207}$$

тогда из только что доказанной леммы следует измеримость функции $c(\lambda)$.

Равенство (206) показывает, что условие (198) выполнено. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 6.4. *Пусть* $\{x(s, t)\}$ — *однородное случайное поле, а* $\{x_1(s, t)\}$, $\{x_2(s, t)\}$ — *его соответственно сингулярная и регулярная компоненты. Если* $\{x(s, t)\}$ *является полем марковского типа, то и поля* $\{x_1(s, t)\}$ *и* $\{x_2(s, t)\}$ — *поля марковского типа.*

Доказательство. По определению полей $\{x_1(s, t)\}$ и $\{x_2(s, t)\}$ имеем

$$x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t))$$
$$\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t) = x_1(s, t) + \operatorname{proj}_{H_{x_2}(t-l)} x_2(s, t) =$$
$$= \operatorname{proj}_{H_{x_1}(t-l)} x_1(s, t) + \operatorname{proj}_{H_{x_2}(t-l)} x_2(s, t). \tag{208}$$

Так как поля $\{x_1(s, t)\}$ и $\{x_2(s, t)\}$ взаимно ортогональны, то

$$\operatorname{proj}_{H_{x_\nu}(t-l)} x_\nu(s, t) \in G_{x_\nu}(t-l), \quad (\nu = 1, 2). \tag{209}$$

Здесь $G_{x_\nu}(t-l)$ означает минимальное линейное замкнутое подпространство, содержащее все величины $x_\nu(s, t-l)$, для которых $-\infty < s < \infty$. Поэтому теорема доказана.

Теорема 6.4.

(1°). *Для того, чтобы однородное случайное поле* $\{x(s, t)\}$ *было полем марковского типа, достаточно выполнение следующего условия:*

$$F_x(\omega) = \iint\limits_{\omega} \frac{1}{|d(\lambda) - i\mu|^2}\, dG(\lambda)\, d\mu, \quad \text{для всех измеримых } (\lambda, \mu)\text{-множеств } \omega \subseteq \Omega, \tag{210}$$

где

а) $G(\lambda)$ — *некоторая действительная неубывающая, ограниченная функция на* λ*-оси.*

б) $d(\lambda)$ — *комплексная функция с* $\operatorname{Re}\{d(\lambda)\} \leqslant 0$ *такая, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dG(\lambda)}{-\operatorname{Re}\{d(\lambda)\}} < +\infty,$$

в)

$$\Omega = \{(\lambda, \mu);\quad d(\lambda) - i\mu \neq 0\}.$$

(2°) *Если поле* $\{x(s, t)\}$ *является полем марковского типа, то существуют функции* $d(\lambda)$ *и* $g(\lambda)$ *такие, что*

$$F_x(\omega) = \iint\limits_{\omega} \frac{g(\lambda)}{|d(\lambda) - i\mu|^2} dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu, \quad \text{для всех измеримых } (\lambda, \mu)\text{-множеств } \omega \subseteq \Omega \tag{211}$$

где

а) $\operatorname{Re}\{d(\lambda)\} \leqslant 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty)$,

б) $g(\lambda) \geqslant 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty)$,

в) $\Omega = \{(\lambda, \mu);\ d(\lambda) - i\mu \neq 0\}$.

(3°) *Поле* $\{x(s, t)\}$ *является сингулярным тогда и только тогда, когда* $g(\lambda) \equiv 0$, *и является регулярным тогда и только тогда, когда* $F_x(\overline{\Omega}) = 0$.

Доказательство. (1°) Так же, как при доказательстве теоремы 6.2, мы можем доказать, что

$$\mathbf{M}\Big[x(s, t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)}\, e^{-il\mu}\, e^{d(\lambda)l}\, dZ_x(\lambda, \mu),\ \overline{x(s', t')}\Big] = 0, \tag{212}$$

т. е. что $\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t) \in G_x(t-l)$.

2°. Пусть $x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t)$, где $x_1(s, t)$ и $x_2(s, t)$ — соответственно сингулярная и регулярная компоненты поля $\{x(s, t)\}$. Обозначим через $F_{x_\nu}(\lambda, \mu)$ спектральную функцию поля $\{x_\nu(s, t)\}$. По теоремам 6.4 и 6.1, в силу (147), при любом измеримом (λ, μ)-множестве S,

$$F_{x_2}(S) = \iint\limits_S \frac{1}{\pi} \frac{-\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2}\, dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint\limits_S \frac{1}{\pi} \frac{-\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2}\, v(\lambda)\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu. \tag{213}$$

Так как поле $\{x_1(s, t)\}$ является сингулярным полем марковского типа, то, в силу теоремы 6.3, существует измеримая комплексная функция $c_1(\lambda)$ с $\operatorname{Re}\{c_1(\lambda)\} = 0$ такая, что

$$F_{x_1}(\{(\lambda, \mu);\ i\mu \neq c_1(\lambda)\}) = 0. \tag{214}$$

Но, с другой стороны, по нашему предположению, существует функция $\varphi_l(\lambda)$ такая, что

$$\operatorname{proj}_{H_x(t-l)} x(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda + (t-l)\mu]}\, \varphi_l(\lambda)\, dZ_x(\lambda, \mu), \tag{215}$$

т. е.

$$x_1(s, t) + \operatorname{proj}_{H_{x_2}(t-l)} x_2(s, t) = \sum_{\nu=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda + (t-l)\mu]}\, \varphi_l(\lambda)\, dZ_{x_\nu}(\lambda, \mu), \tag{216}$$

из чего следует

$$\operatorname{proj}_{H_{x_2}(t-l)} x_2(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda + (t-l)\mu]}\, \varphi_l(\lambda)\, dZ_{x_2}(\lambda, \mu), \tag{217}$$

$$x_1(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i[s\lambda + (t-l)\mu]}\, \varphi_l(\lambda)\, dZ_{x_1}(\lambda, \mu). \tag{218}$$

В силу (217), согласно теореме 6.1, почти всюду на λ-оси (относительно меры $dF_{x_2}(\lambda, \infty)$) имеет место равенство

$$\varphi_l(\lambda) = e^{c(\lambda)l}. \tag{219}$$

Обозначим через γ множество $\{\lambda;\ \varphi_l(\lambda) = e^{c(\lambda)l}\}$ и положим

$$d(\lambda) = \begin{cases} c(\lambda), & \lambda \in \gamma \\ c_1(\lambda), & \lambda \overline{\in} \gamma. \end{cases}$$

Тогда, в силу (218) и (214), имеем

$$F_{x_1}(\omega) = 0, \quad \omega \subseteq \Omega. \tag{220}$$

Отсюда при $\omega \subseteq \Omega$ мы находим

$$F_x(\omega) = F_{x_1}(\omega) + F_{x_2}(\omega) = F_{x_2}(\omega) =$$

$$= \iint\limits_\omega \frac{1}{\pi} \frac{-\operatorname{Re}\{c(\lambda)\}}{|c(\lambda) - i\mu|^2}\, dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint\limits_\omega \frac{1}{\pi} \frac{-\operatorname{Re}\{d(\lambda)\}}{|d(\lambda) - i\mu|^2}\, dF_{x_2}(\lambda, \infty)\, d\mu =$$

$$= \iint\limits_\omega \frac{1}{\pi} \frac{-\operatorname{Re}\{d(\lambda)\}}{|d(\lambda) - i\mu|^2}\, v(\lambda)\, dF_x(\lambda, \infty)\, d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Из теорем 6.2 и 6.3 непосредственно вытекает третье утверждение нашей теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключение считаю необходимым выразить глубокую благодарность А. М. Яглому за постановку задач, рассмотренных в настоящей работе.

Поступила в редакцию
29.10.56.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, VII, вып. 5(51) (1952), 3—158.
[2] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2, вып. 6(1941), 1—40.
[3] А. Н. Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. АН СССР сер. матем., 5, № 5 (1941), 3—14.
[4] K. Karhunen, Über linearen methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. sci. Fennicae, I, No. 37 (1947), 3—79.
[5] K. Karhunen, Über die Struktur stationärer zufälligen Funktionen, Ark. für Mat., I, No. 2 (1950), 141—160.
[6] R. E. A. C. Paley, N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, New York, 1939.
[7] J. L. Doob, Stochastic processes, New York, 1953.
[8] E. Hill, J. D. Tamarkin, On a theorem of Paley and Wiener. Ann. Math., 34, No 3 (1933), 606—614.
[9] E. Hill, J. D. Tamarkin, On the absolute integrability of Fourier transforms. Fund. Math., 25 (1935), 329—352.
[10] В. И. Крылов, О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб., 6(48) (1939), 95—138.
[11] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, 46 (1944), 306—309.

EXTRAPOLATION THEORY OF A HOMOGENEOUS RANDOM FIELD WITH CONTINUOUS PARAMETERS

CHIANG TSE-PEI (PEKING)

(*Summary*)

An homogeneous random field is defined to be a family of random variables $x(s, t)$, $(-\infty < s < \infty, \ -\infty < t < \infty)$, such that $\mathbf{M}[x(s, t)] \equiv 0$, $\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \mathbf{M}[x(s+h_1, t+h_2) - x(s, t)]^2 = 0$, and that $B_x(s, t) = \mathbf{M}[x(s+m, t+n)\,\overline{x(m, n)}]$ exists and is independent of m and n.

In the present paper, the extrapolation problem consists in determining the best linear prediction for the value of the field at any point in the upper half-plane by values at points in the entire lower half-plane. Various types of homogeneous random fields (singular fields, regular fields and fields of Markov's type) are considered from the point of view of extrapolation theory. Necessary and sufficient conditions for these types of random fields are given in terms of spectral functions of the field. An expression for the mean square error of the optimum prediction is also obtained.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1957

ON A STOCHASTIC PROCESS CONCERNING SOME WAITING TIME PROBLEMS

By *LAJOS TAKÁCS*

Introduction

Special queuing problems arise in connection with servicing of automatic machines. In the following we shall treat the case when the machines are serviced by a single repairman.

The model describing the situation. Suppose that m automatic machines are serviced by a single repairman. Normally the machines work continuously in the time interval $0 \leqslant t < \infty$, however, at any time the machines may break down and call for service. We suppose that at time t a machine is in a working state, and the probability that it will call for service in the time interval $(t, t + \Delta t)$ is $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ for each machine. We assume that the machines work independently. If a machine breaks down it will be serviced immediately unless the repairman is servicing another machine, in which case a waiting line is formed. The servicing of the machines is performed in the order of their breakdowns. Assume that the repairman works if there is at least one machine on the waiting line. Suppose that the times required for servicing the machines are independent positive random variables with the common distribution function $F(x)$. Let us assume

$$\alpha = \int_0^\infty x \, dF(x) \tag{1}$$

and

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \alpha)^2 \, dF(x); \tag{2}$$

α or σ^2 may be eventually infinite. Further let

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \tag{3}$$

be the Laplace—Stieltjes transform of $F(x)$. $\varphi(s)$ is convergent if $\Re(s) \geqslant 0$.

Practical applications. The above model can be applied successfully for describing of the simultaneous working of several automatic machines (e. g. powerlooms) or waiting lines for a finite number of trunklines concerning telephone traffic. In the second case we speak about calls

and conversations instead of breakdowns and service times, respectively. We shall use the former terminology. In connection with several automatic machines working simultaneously it is important to establish the complete producing time and the complete servicing time for a given time interval, further the optimal number of machines for a single repairman and the waiting time, chiefly in case of telephone traffic. We shall give the basic probabilities which are sufficient to determine all the quantities mentioned.

Notations and conceptions. Denote by $\eta(t)$ the number of machines working in the instant t. We say that the system is in state $E_k (k = 0, 1, \ldots, m)$ if k machines are working simultaneously. Let τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ denote the endpoints of the consecutive service times and let $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$. Put $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ and $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k (k = 0, 1, \ldots, m-1)$. Denote by the random variable $\chi(t)$ the time which is needed from the instant t till the termination of actual servicing, if there is such. Put

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x \mid \eta(t) = k\} = F_k^*(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

The process investigated may be considered as a Markov process if we describe the state of the system with the random variables $\eta(t)$ and $\chi(t)$. We shall show that the limiting distributions of the random variables $\eta(t)$ and $\chi(t)$ exist for $t \to \infty$ and are independent of the initial distribution. Thus, we can define the *stationary process* supposing that the distribution of $\eta(0)$ is $\{P_k^*\}$ and the distribution function of $\chi(0)$ under the condition $\eta(0) = k (k = 0, 1, \ldots, m-1)$ is $F_k^*(x)$. In case of a stationary process denote by $G_m(x)$ the distribution function of the waiting time of a machine, i. e. of the time interval between a breakdown and the beginning of the servicing and let the expectation of this waiting time be Γ_m.

Summary of previous results. By our knowledge A. Khintchine [6] was the first who investigated the stochastic process mentioned above. To determine the distribution $\{P_k\}$ (in [6] $\pi_k = P_{m-1-k}$) A. Khintchine deduced a system of linear equations, but he did not solve it. In this paper we give the exact solution of these equations. Further A. Khintchine gave a formula for the expectation of the waiting time by means of the unknown quantity π_0, but this result is not correct, unless $F(x)$ is an exponential distribution. In what follows we determine Γ_m explicitely. R. Kronig [10] and R. Kronig and H. Mondria [11] give an explicit formula for the expectation of the waiting time, but they make the same mistake as Khintchine. The expectation of the distribution $\{P_k^*\}$ was determined by H. Ashcroft [1] in a recursive way, without knowing the distribution $\{P_k^*\}$. In case the service time has an exponential distrbution $\{P_k^*\}$ was determined by Th. Fry [5] and by C. Palm [13]. In case the service time is constant or has an exponential distribution some results have been given by the author in [14]. We do not mention here several papers dealing with other waiting time problems.

Formulation of the problems. In the following we determine the exact form of the distributions $\{P_k\}$ and $\{P_k^*\}$, the binomial moments of these, the distribution function $G_m(x)$ of the waiting time in the stationary case and its expectation Γ_m.

§ 1. Determination of the distribution $\{P_k\}$

Theorem 1. *The limiting distribution* $\{P_k\}$ *exists independently of the initial distribution of* $\eta(0)$ *and we have*

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \tag{B}$$

where B_r *is the r-th binomial moment of* $\{P_k\}$, *which is given by*

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{5}$$

where $C_0 = 1$ *and*

$$C_r = \prod_{i=1}^{r} \frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}. \tag{6}$$

Proof: It is easily seen that the sequence of random variables $\{\eta_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ forms a Markov chain with transition probabilities $\mathbf{P}\{\eta_{n+1} = k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$, where

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{j+1-k} \, dF(x) \tag{7}$$

for $j = 0, 1, \ldots, m-2$ and

$$p_{m-1,\,k} = p_{m-2,\,k}. \tag{8}$$

This Markov chain is ergodic and thus the limiting probabilities $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ exist and are independent of the initial distribution of η_1. The limiting distribution is uniquely determined by

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{m-1} p_{jk} P_j \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{9}$$

and

$$\sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1. \tag{10}$$

(Cf. W. Feller [4], p. 325.)

To solve the system of linear equations (9) and (10) let us define the generating function

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k. \tag{11}$$

From (9) we have for $U(z)$ the integral equation

$$U(z) = \int_0^\infty (1 - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x})\, U(1 - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x})\, dF(x) +$$

$$+ (1 - z)\, P_{m-1} \int_0^\infty e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x})^{m-1} dF(x). \quad (12)$$

Now let us introduce the binomial moments

$$B_r = \sum_{k=r}^{m-1} \binom{k}{r} P_k \quad (13)$$

of the distribution $\{P_k\}$. Clearly we have

$$B_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1}. \quad (14)$$

From (10) $B_0 = 1$ and, by r-times differentiating (13), we obtain that

$$B_r = [B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} P_{m-1}] \int_0^\infty e^{-r\mu x} dF(x) \, (r = 1, 2, \ldots, m-1). \quad (15)$$

For the sake of brevity put

$$\varepsilon_r = \varphi(r\mu) = \int_0^\infty e^{-r\mu x} dF(x)$$

then from (15) we get

$$B_r = \frac{\varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r} \left[B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1} \right], \quad (16)$$

being $P_{m-1} = B_{m-1}$. The system of linear equations (16) can be easily solved. If we consider B_{m-1} as fixed, then (16) is a linear difference equation of the first order with variable coefficients, which can be solved simply (Cf. Ch. Jordan [8], p. 583). The solution is

$$B_r = C_r \left[1 - B_{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j} \right],$$

where $C_0 = 1$ and

$$C_r = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} \cdots \frac{\varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r}.$$

Put $r = m - 1$ in the expression of B_r; then we obtain

$$B_{m-1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}},$$

and thus finally

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \quad (17)$$

This proves (5).

The unknown probabilities $\{P_k\}$ can be expressed as

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}.$$

The derivatives of $U(z)$ are known at $z=1$, and by means of these we can determine the derivatives at $z=0$ without difficulty and thus we get the required probabilities P_k, too.It is, however, more convenient to use Ch. Jordan's formula which gives the probabilities P_k immediately by the binomial moments. According of this formula we obtain

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} B_r, \tag{18}$$

which proves (4). (Multiplying (13) by $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$ and adding the equalities over all k, we obtain (18).)

§ 2. Determination of the distribution $\{P_k^*\}$

Theorem 2. *The limiting distribution $\{P_k^*\}$ exists and is independent of the initial distribution of $\eta(0)$. We have*

$$P_k^* = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} B_r^*, \tag{19}$$

where B_r^* is the r-th binomial moment of the distribution $\{P_k^*\}$. $B_0^* = 1$ and

$$B_r^* = \frac{mC_{r-1}}{r} \frac{\sum_{j=r-1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}} \tag{20}$$

where C_j is defined by (6).

Proof. We need some lemmas.

Lemma 1. *Denote by $M^*(t)$ the expectation of the number of transitions $E_{m-1} \to E_m$ occuring in the time interval $(0, t)$. For all $h > 0$ we have*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M^*(t+h) - M^*(t)}{h} = \frac{m\mu}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{21}$$

To prove (21) let us consider the state E_{m-1} of the Markov-chain $\{\eta_n\}$. The state E_{m-1} is a recurrent state and the expectation of the recurrence step number is $1/P_{m-1}$ (Cf. W. Feller [4], p. 325.). The time between consecutive transitions $E_{m-1} \to E_m$ consists of an idle-period and a service-period (busy-period) of the repairman. The expectation of the length of the idle-period is $1/m\mu$ and that of the service-period α/P_{m-1}, namely the mean service time is α and the expectation of the number of services during a service-period is $1/P_{m-1}$. The time differences between consecutive transitions $E_{m-1} \to E_m$ are, as it can be easily seen, equidistributed independent ran-

dom variables. Accordingly, the common expectation of these variables is

$$\frac{1}{m\mu}+\frac{\alpha}{P_{m-1}}=\frac{1}{m\mu}\left[1+m\alpha\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}\right],$$

taking (4) into consideration. Now we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M^*(t+h)-M^*(t)}{h}=\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}$$

according to a theorem of J. L. Doob [3], if the distributions of the time between any transitions $E_{m-1}\to E_m$ are not of a singular type or to a theorem of D. Blackwell [2] if the distribution of the time between consecutive transitions $E_{m-1}\to E_m$ is not of a lattice type. In our case these conditions are satisfied and thus the proof of the lemma is complete.

Lemma 2. *Denote by $M(t)$ the expectation of the number of servicing times which terminate in the time interval $(0, t)$. For all $h>0$ we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{22}$$

$M(t)$ can be interpreted as the expectation of the number of instants $\{\tau_n\}$, for which $0\leqslant\tau_n\leqslant t$. Denote by $\{\tau_n^{(j)}\}$ the sequence of those instants which are the endpoints of the j-th service in the different service-periods. Denote by $M_j(t)$ the expected number of the instants $\{\tau_n^{(j)}\}$ for which $0\leqslant\tau_n^{(j)}\leqslant t$. Clearly

$$M(t)=\sum_{j=1}^{\infty}M_j(t). \tag{23}$$

The time differences between consecutive instants $\tau_n^{(j)}$ are equidistributed independent random variables. The distribution of these random variables satisfies the condition stated by J. L. Doob [3] or by D. Blackwell [2] and accordingly, the limit $\lim_{t\to\infty}[M_j(t+h)-M_j(t)]/h$ exists and agrees with the reciprocal value of the expectation of the distribution in question. This expectation is

$$\frac{1}{Q_j}\left(\frac{1}{m\mu}+\frac{\alpha}{P_{m-1}}\right),$$

where Q_j is the probability that a service-period contains at least j services. Namely $\tau_{n+1}^{(j)}-\tau_n^{(j)}$ is a sum of equidistributed random variables, where the number of the terms of the sum is a random variable with a distribution $\{(1-Q_j)^{l-1}Q_j\}\,(l=1, 2, \ldots)$ and the distribution of each random variable is the same as that of the time intervals between consecutive transitions $E_{m-1}\to E_m$. The above expectation is yielded by A. Wald's fundamental equation (Cf. A. N. Kolmogorov and Ju. V. Prohorov [9]). Thus we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_j(t+h)-M_j(t)}{h}=Q_j\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{24}$$

As we have seen the expected number of servicings in a service-period is

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = \frac{1}{P_{m-1}},$$

Thus by (23) and (24) we obtain

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \frac{m\mu}{ma\mu + P_{m-1}}.$$

For

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_j(t+h)-M_j(t)}{h}$$

and the limit may be formed term by term the sum being uniformely convergent. This follows from the facts

$$Q_j M^*(t) \leqslant M_j(t) \leqslant Q_j [M^*(t)+1]$$

and

$$M^*(t+h) - M^*(t) \leqslant M^*(h) + 1,$$

whence

$$\frac{M_j(t+h)-M_j(t)}{h} \leqslant Q_j \frac{M^*(t+h)-M^*(t)+1}{h} \leqslant Q_j \frac{M^*(h)+2}{h}.$$

This proves (22).

Lemma 3. *Denote by $M_k^*(t)$ the expectation of the number of transitions $E_k \to E_{k+1}$ occuring in the time interval $(0, t)$. For all $h>0$ we have*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_k^*(t+h)-M_k^*(t)}{h} = \frac{m\mu P_k}{ma\mu + P_{m-1}}. \tag{25}$$

Lemma 1 proves (25) for $k = m-1$. The existence of the limit on the left-hand side in (25) is assured by the theorems of J. L. Doob [3] and D. Blackwell [2]; namely the time differences between consecutive transitions $E_k \to E_{k+1}$ are equidistributed independent random variables whose distribution satisfies the conditions mentioned above. If the limit (25) exists then it is clearly the same as

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_k^*(t)}{t}.$$

On the other hand we have $M_k^*(t) \sim P_k M(t)$ $(t\to\infty)$, which proves (25).

Next we are going to prove Theorem 2, i. e. to determine the probabilities $\{P_k^*\}$. First of all consider the probability P_m^*. In a simple way we get

$$\mathbf{P}\{\eta(t) = m\} = \int_0^t e^{-m\mu(t-x)}\, dM^*(x).$$

Now using (21) an easy calculation shows that $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=m\} = P_m^*$ exists and we have

$$P_m^* = \frac{P_{m-1}}{ma\mu + P_{m-1}} = \frac{1}{1 + ma\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \tag{26}$$

We remark that this result can be obtained also by a theorem of R.E.A.C. Paley and N. Wiener [12] (p. 59). $\mathbf{P}\{\eta_l(t) = m\}$ as a function of t satisfies an integral equation of Volterra type and the limit of the solution is yielded by the mentioned theorem.

Denote by $N_m(t)$ the expectation of the number of transitions $E_m \to E_{m-1}$ occuring in the time interval $(0, t)$. We have

$$\lim_{t\to\infty} N'_m(t) = m\mu P^*_m, \tag{27}$$

for clearly $N_m(t+\Delta t) = N_m(t) + \mathbf{P}\{\eta_l(t) = m\}\, m\mu\Delta t + o(\Delta t)$ and as we have seen, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_l(t) = m\} = P^*_m$ exists.

Now using (25) and (27) we can write for $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$P^*_k = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{j=k}^{m-1} p^*_{jk} P_j, \tag{28}$$

where if $j = 0,1, \ldots, m-2$

$$p^*_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{j+1-k} [1 - F(x)]\, dx \tag{29}$$

and

$$p^*_{m-1,\,k} = p^*_{m-2,\,k}. \tag{30}$$

(28) may be proved as follows: The event $\eta_l(t) = k$ can occur in the following mutually exclusive ways: at the instant x (where $0 < x < t$) there occurs a transition $E_j \to E_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-2)$ and the servicing does not terminate before t and in the time interval (x, t), $j+1-k$ machines break down, or if at the instant x (where $0 < x < t$) there occurs a transition $E_m \to E_{m-1}$, the servicing does not terminate before t and in the time interval (x, t), $m-k+1$ machines break down. In such a way $\mathbf{P}\{\eta_l(t) = k\}$ can be expressed by the theorem of total probability. Letting $t \to \infty$ we get (28).

Thus we proved the existence of the limiting distribution $\{P^*_k\}$ and expressed P^*_k by means of $\{P_k\}$. Later we shall prove that P^*_k can be expressed by $\{P_k\}$ also in a simpler way.

Let us introduce the binomial moments

$$B^*_r = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} P^*_k \tag{31}$$

of the distribution $\{P^*_k\}$. By virtue of (28), similarly to (15) we obtain

$$B^*_r = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1}\right] \int_0^\infty e^{-r\mu x} [1 - F(x)]\, dx. \tag{32}$$

As

$$\int_0^\infty e^{-r\mu x} [1 - F(x)]\, dx = \frac{1 - \varepsilon_r}{r\mu},$$

taking (15) into consideration we have

$$B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \frac{1-\varepsilon_r}{r\mu\varepsilon_r} B_r \quad (r = 1, 2, \ldots, m-1)$$

further $B_0^* = 1$ and by (26)

$$B_m^* = \frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}$$

thus $B_m^* = P_m^*$. This proves (20); (19) can be deduced immediately from (20).

Corollary. *The distribution* $\{P_k^*\}$ *can be obtained from* $\{P_k\}$ *in the following way*:

$$P_k^* = \frac{mP_{k-1}}{k[m\alpha\mu + P_{m-1}]} \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{33}$$

and

$$P_0^* = 1 - \frac{m}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{P_{k-1}}{k}. \tag{34}$$

Proof: In view of (16) and by (32) we have

$$B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1} \right] \quad (r = 1, 2, \ldots, m-1),$$

while $B_0^* = 1$ and $B_m^* = P_m^*$. Using this form of B_r^* we get (33) by (19).

Remark: The above result can be easily deduced from the fact, that the difference of the numbers of the transitions $E_{k-1} \to E_k$ and $E_k \to E_{k-1}$ occuring in a given time interval may be only at most one, i. e. the expectations of the transitions $E_{k-1} \to E_k$ and $E_k \to E_{k-1}$ are asymptotically equal. By (25) we have

$$\lim_{t \to \infty} \frac{M_{k-1}^*(t)}{t} = \frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}. \tag{35}$$

Denote by $N_k(t)$ the expectation of the number of transitions $E_k \to E_{k-1}$ occuring in the time interval $(0, t)$. It is easily seen, that

$$N_k(t + \Delta t) = N_k(t) + \mathbf{P}\{\eta(t) = k\}\, k\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

that is

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = k\mu\, \mathbf{P}\{\eta(t) = k\},$$

hence it follows

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dN_k(t)}{dt} = k\mu P_k^* \tag{36}$$

and it is also true that

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_k(t)}{t} = k\mu P_k^*.$$

As $M_{k-1}(t) \sim N_k(t)$ (or more precisely $|M_{k-1}(t) - N_k(t)| \leqslant 1$) by (35) and (36) we have (33).

§ 3. Stationary process

First of all we shall investigate the limiting distribution of the random variable $\chi(t)$.

Theorem 3. *Let the random variable $\chi(t)$ denote the time which is needed from the instant t till the termination of the service going on at that instant. If α is finite then the limiting distribution*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x \mid \eta(t) = k\} = F_k^*(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{37}$$

exists and we have

$$F_k^*(x) = \frac{k\mu}{P_{k-1}} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} P_j \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-k\mu u} (1 - e^{-\mu u})^{j+1-k} [F(u+x) - F(u)]\, du.$$

Proof: Clearly we have

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x,\ \eta(t) = k\} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu(t-u)} (1 - e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k} [F(t-u+x) - \\ \qquad - F(t-u)]\, dM_j^*(u) \quad \text{if} \quad k = 0, 1, \ldots, m-2 \\ \int_0^t e^{-(m-1)\mu(t-u)} [F(t-u+x) - F(t-u)]\, dN_m(u) \quad \text{if} \quad k = m-1. \end{cases}$$

For the event $\{\chi(t) \leqslant x,\ \eta(t) = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-2)$ can occur if at the instant u (where $0 \leqslant u \leqslant t$) there takes place a transition $E_j \to E_{j+1}$ $(j = k, k+1, \ldots, m-1)$ and the servicing beginning at the instant u terminates in the time interval $(u, t+x)$ and further in the time interval (u, t), $j+1-k$ machines break down, and the event $\{\chi(t) \leqslant x,\ \eta(t) = m-1\}$ can occur if in the instant u (where $0 \leqslant u \leqslant t$) there takes place a transition $E_m \to E_{m-1}$ and the servicing beginning at the instant u terminates in the time interval $(t, t+x)$ and in the time interval (u, t) not machines break down. Now by the aid of (25) and (27) we obtain

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x,\ \eta(t) = k\} = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} P_j \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-k\mu u} (1 - e^{-\mu u})^{j+1-k} [F(u+x) - F(u)]\, du$$

for $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Taking into consideration that

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x \mid \eta(t) = k\} = \frac{\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x,\ \eta(t) = k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t) = k\}},$$

we obtain (37) by $\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$. This proves the theorem.

Corollary. *In case* $\alpha < \infty$ *we have*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x \mid \eta(t) < m\} = F^*(x) \tag{38}$$

where

$$F^*(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x [1 - F(y)]\, dy.$$

This follows immediately from (37) or can be deduced by

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqslant x,\ \eta(t) < m\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} \int_0^t [F(t-u+x) - F(t-u)]\, dM_k^*(u) +$$

$$+ \int_0^t [F(t-u+x) - F(t-u)]\, dN_m^*(u).$$

The stationary process. If we suppose that the initial distributions of the investigated process are $\mathbf{P}\{\eta(0) = k\} = P_k^*$ and $\mathbf{P}\{\chi(0) \leqslant x \mid \eta(0) = k\} = F_k^*(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$, then the distributions of $\eta(t)$ and $\chi(t)$ agree in all instants with the initial distribution of $\eta(0)$ resp. $\chi(0)$. Furthermore the expectation of the number transitions $E_k \to E_{k+1}$ occuring in the time interval $(0, t)$ is

$$M_k^*(t) = \frac{m\mu P_k}{m\alpha\mu + P_{m-1}}\, t \tag{39}$$

and the expectation of the number of transitions $E_k \to E_{k-1}$ occuring in the time interval $(0, t)$ is

$$N_k(t) = \frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}\, t. \tag{40}$$

Thus our process is stationary. In most applications the stationary process plays an important rôle. Next we shall prove some theorems concerning the stationary process.

Theorem 4. *In case of a stationary process the expectation of the production time of a machines in the time interval* $(0, T)$ *is*

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \eta(t)\, dt\right\} = T\, \frac{m \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \tag{41}$$

Proof: As it is well known we have

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \eta(t)\,dt\right\} = \int_0^T \mathbf{M}\{\eta(t)\}\,dt$$

and further $\mathbf{M}\{\eta(t)\} = B_1^*$ where B_1^* is given by (20).

Let the random variable $\xi(t)$ be defined as follows

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \eta(t) < m \\ 0 & \text{if } \eta(t) = m. \end{cases}$$

Theorem 5. *In the case of a stationary process the expectation of the busy time of the repairman in the time interval* $(0, T)$ *is*

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \xi(t)\,dt\right\} = T\,\frac{m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-j}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{42}$$

Proof: We have

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \xi(t)\,dt\right\} = \int_0^T \mathbf{M}\{\xi(t)\}\,dt$$

and $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \mathbf{P}\{\xi(t) = 1\} = \mathbf{P}\{\eta(t) < m\} = 1 - P_m^*$, where P_m^*, is given by (19) or (26).

Theorem 6. *In case of a stationary process denote by* $G_m(x)$ *the distribution function and* Γ_m *the expectation of the waiting time of a machine. We have*

$$G_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} P_{k-1} F_{k-1}^*(x) * F_{m-k-1}(x) + P_{m-1} F_0(x), \tag{43}$$

where $F_n(x)$ *denotes the n-fold convolution of* $F(x)$ *with itself (while* $F_0(x) = 1$ *if* $x \geqslant 0$ *and* $F_0(x) = 0$ *if* $x < 0$*).*

Furthermore if $\sigma < \infty$ *then*

$$\Gamma_m = (m-1)\,\alpha + \left[1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}\right]\left[\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1-\varepsilon_1}\right]. \tag{44}$$

Proof: The probability that a breakdown is associated by transition $E \to E_{k-1}$ is

$$\frac{kP_k^*}{\sum_{k=0}^{m} kP_k^*} = \frac{kP_k^*}{B_1^*} = P_{k-1}$$

in the stationary case. If $k = m$ then the waiting time is zero, while if $k = 1, 2, \ldots, m-1$ then the waiting time consists of the time till the termination of actual service (which has the distribution $F_{k-1}^*(x)$) and the service time of the $m - k - 1$ machines which are on the waiting line (with

distribution $F(x)$ of each). In this way we get (43). If we take into consideration that

$$\int_0^\infty x dF^*(x) = \frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha},$$

then similarly we get

$$\Gamma_m = \sum_{k=1}^{m-1} P_{k-1}\left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} + (m-k-1)\alpha\right].$$

By formulae (4) and (5) for P_{m-1} and B_1 respectively, we obtain

$$\Gamma_m = (m-1)\alpha + (1-P_{m-1})\left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1-\varepsilon_1}\right],$$

which proves (44).

Remark 1. It is worth noticing that we used the hypothesis that the servicing is performed in order of the breakdowns only for deducing $G_m(x)$. The other results including the form of Γ_m hold without this restriction, too.

Remark 2. If we had followed the considerations given by A. Khintchine [6], we should have obtained

$$\Gamma'_m = (m-1)\alpha - \frac{1}{\mu}(1-P_{m-1}) \tag{45}$$

for the expectation of the waiting time. A. Khintchine proceeds the following way: By (40), the expected number of the breakdowns per unit time is $1-P_m^*$ and relating to one machine this quantity is $(1-P_m^*)/m$. Each breakdown is followed by a waiting time, a service time and a working-time, the expectations of whose lengths are Γ'_m, α, $1/\mu$ respectively. Consequently

$$\frac{1-P_m^*}{m}\left[\Gamma'_m + \alpha + \frac{1}{\mu}\right] = 1$$

and thus we obtain (45). This agrees with Γ_m only in the special case if $F(x)$ has an exponential distribution. A. Khintchine here uses essentially Wald's fundamental equation for the expectation of the sums of random number of random terms, though Wald's conditions are not satisfied here (Cf. A. N. Kolmogorov and Ju. V. Prohorov [9]).

Remark 3. In the limiting case $m\to\infty$ and $\mu = \lambda/m$, where λ is a constant, we have for $\lambda\alpha < 1$

$$P_{m-1} = (1-\lambda\alpha) - \frac{\lambda\alpha}{m(1-\lambda\alpha)}\left[\frac{\lambda(\alpha^2-\sigma^2)}{2\alpha} - 1\right] + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

By aid of the above form of P_{m-1} we have for both Γ_m and Γ'_m the following limit

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_m = \frac{\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha}$$

which agrees with the known result of A. Khintchine [7].

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences.

Поступила в редакцию 15. 6. 56

BIBLIOGRAPHY

[1] H. Ashcroft, The productivity of several machines under the care of one operator, J. of the Royal Stat. Soc. of London, Ser. B., **12**, (1950), 145—151.
[2] D. Blackwell, A renewal theorem, Duke Math. J., **15**, (1948), 145—150.
[3] J. L. Doob, Renewal theory from the point of view of the theory of probability, Transactions of the Am. Math. Soc., **63** (1948), 422—438.
[4] W. Feller, An introduction to probability theory and its aplications, New York, 1950.
[5] Th. Fry, Probability and its engineering uses, New-York, 1928.
[6] А. Я. Хинчин, О среднем времени простоя станков, Матем. сб., **40** (1933), 119—123.
[7] А. Я. Хинчин, Математическая теория стационарной очереди, Матем. сб., **39**, (1932), 73—84.
[8] Ch. Jordan, Calculus of finite differences, Budapest, 1939.
[9] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров, О суммах случайного числа случайных слагаемых, Успехи матем. наук, **4** (32) (1949), 168—172.
[10] R. Kronig, On time losses in machinery undergoing interruption, I. Physica, **10** (1943), 215—224.
[11] R. Kronig, H. Mondria, On time losses in machinery undergoing interruption, II, Physica, **10** (1943), 331—336.
[12] R. E. A. C. Paley, N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.
[13] C. Palm, The distribution of repairmen in servicing automatic machines, Industritidningen Norden, **75** (1947), 75—80, 90—94, 119—123.
[14] L. Takács, Gépegyüttállások valószinüségszámitási tárgyalása tekintettel a várakozási idökre, Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei, **1** (1951), 228—234.

О СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ, СВЯЗАННОМ С НЕКОТОРЫМИ ЗАДАЧАМИ О ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Л. ТАКАЧ (БУДАПЕШТ)

(Резюме)

Рассматривается следующая вероятностная схема: m машин обслуживаются одним оператором. В исправном состоянии машины работают непрерывно в течение некоторого времени $0 < t < \infty$, однако в любой момент каждая из машин может остановиться и потребовать обслуживания. Предполагается, что вероятность того, что работающая в в момент t машина потребует обслуживания в интервале времени $(t, t + \Delta t)$, равна $\mu \Delta t + o(\Delta t)$. Машины работают независимо одна от другой. Если машина остановилась, то она немедленно обслуживается, если только оператор не занят обслуживанием другой машины. В последнем случае вышедшая из строя машина становится в очередь, в порядке которой она и обслуживается. Промежутки времени, нужные для обслуживания машины, являются случайными величинами, независимыми и одинаково распределенными.

Пусть $\eta(t)$ — число машин, работающих в момент времени t, а $\chi(t)$ — промежуток времени от момента t до окончания обслуживания машины, обслуживаемой в момент времени t. В работе показывается, что величины $\eta(t)$ и $\chi(t)$ имеют при $t \to \infty$ предельные распределения, не зависящие от начальных условий. Находятся явные формулы для этих предельных распределений. Находится также предельное распределение для числа работающих машин в момент начала обслуживания машины. Наконец, для стационарного случая изучается функция распределения для промежутка времени от остановки машины до начала ее обслуживания.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1957

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕЛЕФОННЫМ СИСТЕМАМ С ОТКАЗАМИ

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ

Многие задачи телефонного типа решаются с помощью изучения марковских процессов в соответствующих фазовых пространствах. Это изучение сильно упрощается, если режим работы телефонной системы стационарен. Рассмотрение стационарного распределения оправдано в случае эргодичности, т. е. в том случае, когда распределение вероятностей процесса при $t \to \infty$ сходится к стационарному, каково бы ни было начальное распределение.

В § 1 этой статьи доказывается эргодическая теорема для марковских процессов в той форме, которая, по мнению автора, удобна для задач телефонного типа. Теоремы о предельном поведении вероятностей перехода марковских стационарных процессов получены Дубом [1]. В § 1 настоящей статьи при некоторых условиях, которые, вероятно, являются необходимыми, доказывается существование и единственность стационарного распределения, которое является эргодическим. В более частных предположениях эргодичность и единственность стационарного распределения доказаны А. М. Ягломом [2].

В последующих параграфах эргодическая теорема применяется к изучению телефонной системы с n обслуживающими линиями, с пуассоновским потоком поступающих вызовов и произвольным законом распределения длительности разговора с конечным математическим ожиданием. Получено стационарное распределение, из которого, в частности, выводятся хорошо известные в телефонии формулы Эрланга. До сих пор строгий вывод формул Эрланга проведен лишь для случая показательного закона распределения длительности разговора (см. [3]). Справедливость формул Эрланга для абсолютно непрерывного закона распределения показана Форте [4]. Но в [4] не приводится доказательство единственности и эргодичности стационарного распределения, а лишь даны краткие указания на возможность такого доказательства. Метод доказательства существования, единственности и эргодичности стационарного распределения, основанный на теореме § 1, можно применить к различным задачам, связанным с массовым обслуживанием.

§ 1. Эргодическая теорема

Пусть Ω — абстрактное пространство, F — борелевское тело измеримых множеств этого пространства, содержащее Ω. Функция $P(x, t, A)$, $x \in \Omega$, $A \in F$, $t > 0$ будет определять вероятности перехода однородного марковского процесса за время t из состояния x в множество A, если:

1) $0 \leqslant P(x, t, A) \leqslant P(x, t, \Omega) = 1$;

2) при фиксированных x и t функция $P(x, t, A)$ есть вполне аддитивная функция множества A; при фиксированных A и t функция $P(x, t, A)$ измерима по x относительно тела множеств F;

3) при $t>0$, $s>0$ выполняется уравнение

$$P(x, s+t, A) = \int_{\Omega} P(x, s, dy)\, P(y, t, A).$$

Если P_0 — начальное распределение вероятностей, то распределение вероятностей P_t в момент времени $t>0$ определяется следующим образом:

$$P_t(A) = \int_{\Omega} P_0(dx)\, P(x, t, A);$$

P называется стационарным распределением вероятностей, если при любых $t>0$ и $A \in F$

$$P(A) = \int_{\Omega} P(dx)\, P(x, t, A).$$

Обозначим через $V(P, Q)$ расстояние по вариации между распределениями P и Q

$$V(P, Q) = \operatorname{Var}(P-Q) = \int_{\Omega} |P(dx) - Q(dx)|.$$

Распределение P назовем эргодическим, если, каково бы ни было начальное распределение, $V(P_t, P) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Однородный во времени случайный марковский процесс имеет единственное стационарное распределение вероятностей, которое является эргодическим, если для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество C, распределение вероятностей R в Ω, числа $t_1>0$, $k>0$, $K>0$ такие, что*

1) $kR(A) \leqslant P(x, t_1, A)$ для любых точек $x \in C$ и измеримых множеств $A \subseteq C$; для любого начального распределения P_0 существует такое t_0, что при любом $t \geqslant t_0$

2) $P_t(C) \geqslant 1-\varepsilon$,

3) $P_t(A) \leqslant KR(A) + \varepsilon$ для измеримых множеств $A \subseteq C$.

Доказательство этой теоремы выводится из следующих пяти лемм.

Лемма 1. *Если $t' < t''$, то $V(P_{t'}, Q_{t'}) \geqslant V(P_{t''}, Q_{t''})$.*

Доказательство.

$$V(P_{t''}, Q_{t''}) = \int_{\Omega} |P_{t''}(dy) - Q_{t''}(dy)| = \int_{\Omega_y} \left| \int_{\Omega_x} [P_{t'}(dx) - Q_{t'}(dx)] \right| P(x, t''-t', dy) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega} |P_{t'}(dx) - Q_{t'}(dx)| \int_{\Omega} P(x, t''-t', dy) = \int_{\Omega} |P_{t'}(dx) - Q_{t'}(dx)| = V(P_{t'}, Q_{t'}).$$

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 при любых начальных распределениях P_0 и Q_0*

$$V(P_t, Q_t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Доказательство. В силу леммы 1 $V(P_t, Q_t)$ не возрастает с увеличением t. Поэтому существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} V(P_t, Q_t) = V$. Докажем, что $V=0$. Предположим, что это не так. Выберем $\varepsilon>0$ такое, чтобы $V' = V - 4\varepsilon > 0$. Мы придем к противоречию, показав, что $V(P_{t_0+nt_1}, Q_{t_0+nt_1}) \to 0$ при $n \to \infty$, где t_0 и t_1 — обозначения из условия теоремы 1, соответствующие выбранному $\varepsilon>0$ и начальным распределениям P_0 и Q_0. Представим $V_t = V(P_t, Q_t)$ и $V_{t+t_1} = V(P_{t+t_1}, Q_{t+t_1})$ следующим образом ($A_+ \cup A_- = \Omega$, $B_+ \cup B_- = \Omega$):

$$V_t = \int_{\Omega} |P_t(dx) - Q_t(dx)| = \int_{A_+} [P_t(dx) - Q_t(dx)] + \int_{A_-} [Q_t(dx) - P_t(dx)] = 2[P_t(A_+) - Q_t(A_+)],$$

$$V_{t+t_1} = \int_{\Omega} |P_{t+t_1}(dx) - Q_{t+t_1}(dx)| = \int_{B_+} [P_{t+t_1}(dx) - Q_{t+t_1}(dx)] +$$

$$+ \int_{B_-} [Q_{t+t_1}(dx) - P_{t+t_1}(dx)] = 2[P_{t+t_1}(B_+) - Q_{t+t_1}(B_+)] = 2[Q_{t+t_1}(B_-) - P_{t+t_1}(B_-)].$$

Введем обозначения для двумерных распределений $P_{t,\,t+t_1}(A,\,B)$ и $Q_{t,\,t+t_1}(A,\,B)$, которые будут равны вероятностям пребывания системы в момент времени t в множестве A и в момент времени $t+t_1$ в множестве B, если начальное распределение было P_0 и, соответственно, Q_0. Тогда можно записать

$$V_t = 2\,[P_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_+) + P_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_-) - Q_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_+) - Q_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_-)],$$
$$V_{t+t_1} = 2\,[P_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_+) + P_{t,\,t+t_1}(A_-,\,B_+) - Q_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_+) - Q_{t,\,t+t_1}(A_-,\,B_+)],$$

откуда

$$V_t - V_{t+t_1} = 2\,[P_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_-) - Q_{t,\,t+t_1}(A_+,\,B_-)] + 2\,[Q_{t,\,t+t_1}(A_-,\,B_+) - P_{t,\,t+t_1}(A_-,\,B_+)] =$$
$$= 2\int\limits_{A_+} [P_t(dx) - Q_t(dx)]\,P(x,\,t_1,\,B_-) + 2\int\limits_{A_-} [Q_t(dx) - P_t(dx)]\,P(x,\,t_1,\,B_+) \geqslant$$
$$\geqslant 2\int\limits_{A_+} [P_t(dx) - Q_t(dx)]\,P(x,\,t_1,\,B_-).$$

Пусть C — измеримое множество, R — распределение вероятностей, числа $k > 0$, $K > 0$ соответствуют выбранному $\varepsilon > 0$ в условии теоремы 1. Обозначим $A'_+ = A_+ \cap C$, $B'_- = B_- \cap C$. Тогда

$$V_t - V_{t+t_1} \geqslant 2\int\limits_{A'_+} [P_t(dx) - Q_t(dx)]\,P(x,\,t_1,\,B'_-) \geqslant 2\int\limits_{A'_+} [P_t(dx) - Q_t(dx)]\,kR(B'_-) \geqslant \tag{1}$$
$$\geqslant 2\,[P_t(A'_+) - Q_t(A'_+)]\,\frac{k}{K}\,[Q_{t+t_1}(B'_-) - \varepsilon] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{k}{2K}\,2\,[P_t(A'_+) - Q_t(A'_+)]\cdot 2[Q_{t+t_1}(B'_-) - P_{t+t_1}(B'_-) - \varepsilon].$$

Пусть далее $t \geqslant t_0$. Так как $P_t(C) \geqslant 1-\varepsilon$ и $Q_t(C) \geqslant 1-\varepsilon$, то $P_t(A'_+) \geqslant P_t(A_+) - \varepsilon$, $Q_{t+t_1}(B'_-) \geqslant Q_{t+t_1}(B_-) - \varepsilon$. Так как $Q_t(A'_+) \leqslant Q_t(A_+)$ и $P_{t+t_1}(B'_-) \leqslant P_{t+t_1}(B_-)$, то из (1) следует

$$V_t - V_{t+t_1} \geqslant \frac{k}{2K}\,(V_t - 4\varepsilon)\,(V_{t+t_1} - 4\varepsilon).$$

Обозначим $V'_t = V_t - 4\varepsilon$. Тогда это неравенство можно записать

$$V'_t - V'_{t+t_1} \geqslant \frac{k}{2K}\,V'_t V'_{t+t_1},$$

откуда следует

$$\frac{1}{V'_{t+t_1}} - \frac{1}{V'_t} \geqslant \frac{k}{2K}.$$

Полагая $t = t_0,\ t_0 + t_1,\ t_0 + 2t_1$ и т. д. и складывая полученные неравенства, получим

$$\frac{1}{V'_{t_0+nt_1}} \geqslant \frac{kn}{2K} + \frac{1}{V'_{t_0}} > \frac{kn}{2K},$$

откуда следует, что при $n \to \infty$

$$V'_{t_0+nt_1} < \frac{2K}{kn} \to 0, \tag{2}$$

а это противоречит предположению $V' > 0$. Следовательно, $V = 0$.

Следствие. В условиях теоремы 1 может существовать не более одного стационарного распределения P, причем всегда $V(P_t, P) \to 0$ при $t \to \infty$, каково бы ни было начальное распределение P_0.

Это следствие выводится из леммы 2 очевидным образом.

Лемма 3. *Метрическое пространство P_Ω распределений P на Ω с метрикой $V(P, Q)$ полно.*

Доказательство. Пусть P_n—фундаментальная последовательность распределений. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ и любом целом $m > 0$

$$V(P_n, P_{n+m}) \leqslant \varepsilon.$$

Так как $V(P, Q) = 2 \max_{A \in F} |P(A) - Q(A)|$, то при $n \geqslant n_0$

$$|P_n(A) - P_{n+m}(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (3)$$

т. е. при любом измеримом A последовательность чисел $P_n(A)$ фундаментальна. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} P_n(A) = P(A).$$

Функция множеств $P(A)$ образует распределение вероятностей. Доказательства требует только свойство непрерывности. Пусть последовательность измеримых множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_k \supseteq \ldots$ такова, что их пересечение пусто. Тогда при любом n $P_n(A_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что также $P(A_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Для этого в неравенство (3) подставим A_k вместо A, так что при $n \geqslant n_0$

$$|P_n(A_k) - P_{n+m}(A_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как это неравенство верно при любом m, то оно верно и в пределе при $m \to \infty$

$$|P_{n_0}(A_k) - P(A_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $P_{n_0}(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $k \geqslant k_0$. Тогда при $k \geqslant k_0$ будет иметь место неравенство $P(A_k) \leqslant \varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 4. *В случае выполнения условий теоремы 1, каковы бы ни были начальное распределение вероятностей P_0 и последовательность $t_n \to \infty$, P_{t_n} есть фундаментальная последовательность в пространстве P_Ω.*

Доказательство. Непосредственно из леммы 2 следует, что при любом фиксированном τ и $t \to \infty$

$$V(P_t, P_{t+\tau}) \to 0. \qquad (4)$$

Для доказательства того, что стремление к пределу в (4) равномерно по τ, нужно обратиться к доказательству леммы 2. Оценка (2) зависит от произвольного $\varepsilon > 0$ и первоначальных распределений вероятностей P_0 и Q_0. В нашем случае начальными распределениями будут P_0 и P_τ. Так как эти распределения лежат на одной траектории, то фигурирующее в условиях теоремы 1 t_0 не зависит от τ. Отсюда получается равномерное стремление к нулю в (4).

Лемма 5. *Если при некотором начальном распределении Q_0 и $t \to \infty$ $V(Q_t, P) \to 0$, то P — стационарное распределение вероятностей.*

Доказательство. Пусть $P_0 = P$. Покажем, что при любом $t > 0$ $P_t \equiv P$. В самом деле, при любом $\varepsilon > 0$ существует такое τ_0, что при $\tau \geqslant \tau_0$

$$V(P_t, P) \leqslant V(P_t, Q_{t+\tau}) + V(Q_{t+\tau}, P) \leqslant V(Q_\tau, P) + V(Q_{t+\tau}, P) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $V(P_t, P) \equiv 0$ и $P_t \equiv P$.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 3, 4, 5 следует существование стационарного распределения, а из леммы 2 его единственность и эргодичность.

§ 2. Стационарное распределение для телефонной системы с отказами

Пусть имеется n телефонных линий, на которые поступает пуассоновский поток вызовов с параметром λ. В случае показательного закона распределения длительности разговора со средним μ известны классические формулы Эрланга для вероятностей p_k

того, что при стационарном режиме занято k линий

$$p_k = \frac{\frac{(\lambda\mu)^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda\mu)^i}{i!}}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

В частности, вероятность потери вызова равна p_n. Этот случай изучается с помощью марковского процесса с конечным числом состояний [3]. Ниже будет доказано, что формулы Эрланга (5) остаются справедливыми при произвольном законе распределения с конечным математическим ожиданием μ. Изучение телефонной системы и в этом случае можно проводить с помощью однородного марковского процесса, но для этого придется рассматривать марковский процесс в более сложном фазовом пространстве. Наиболее удобным будет фазовое пространство, состоящее из изолированной точки ω_0, полупрямой ω_1 $(0 \leqslant x_1 < \infty)$, части плоскости ω_2 $(0 \leqslant x_1,\ x_2 < \infty)$, ..., части n-мерного пространства ω_n $(0 \leqslant x_1,\ x_2, \ldots, x_n < \infty)$.

Установим следующее соответствие между точками фазового пространства и состояниями системы. Точка ω_0 соответствует такому состоянию системы, когда все линии свободны. Точка $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из ω_k; $k = 1, 2, \ldots, n$, соответствует k занятым линиям, причем ведущиеся k разговоров уже продолжаются времена $x_1, x_2, \ldots, x_k$. В дальнейшем точку в ω_k с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ будем обозначать $\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Мы предполагаем, что длины разговоров независимы друг от друга и от потока вызовов. В этом случае соответствующий случайный процесс будет марковским. Этот процесс определяется следующими вероятностями перехода за малый промежуток времени Δt

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_0) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$ (не поступило ни одного вызова);

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_1(0)) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$ (поступил один вызов);

$$P(\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k), \Delta t, \omega_k(x_1 + \Delta t, x_2 + \Delta t, \ldots, x_k + \Delta t)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))$$

(не поступило ни одного вызова и не окончился ни один разговор),

$$P(\omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \Delta t, \omega_n(x_1 + \Delta t, x_2 + \Delta t, \ldots, x_n + \Delta t)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)}$$

(не окончился ни один разговор);

$$P(\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k), \Delta t, \omega_{k-1}(x_1 + \Delta t, \ldots, x_{i-1} + \Delta t, x_{i+1} + \Delta t, \ldots, x_k + \Delta t) =$$

$$= \frac{F(x_i + \Delta t) - F(x_i)}{1 - F(x_i)} \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \frac{1 - F(x_j + \Delta t)}{1 - F(x_j)} (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))$$

(окончился разговор, продолжавшийся время x_i и не поступил ни один вызов);

$$P(\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k), \Delta t, \omega_{k+1}(x_1 + \Delta t, \ldots, x_{j-1} + \Delta t, 0, x_j + \Delta t, \ldots, x_k + \Delta t)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} \left(\frac{\lambda}{k+1}\Delta t + o(\Delta t)\right)$$

(поступил один вызов, который занял одну из свободных линий, и не окончился ни один разговор).

Остальные вероятности перехода либо имеют более высокий порядок малости, либо не войдут в интегро-дифференциальные уравнения (9), так как они после осред-

нения дают вероятности, имеющие порядок малости $o(\Delta t)$. Объяснений требует, пожалуй, последняя переходная вероятность. Мы пока что не фиксировали порядок занятия свободных линий поступающими вызовами. Хотя это и не имеет для нас существенного значения, все же для симметрии удобно считать, что поступающий вызов с одинаковой вероятностью занимает любую из свободных линий. При установлении соответствия точки $\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ состоянию телефонной системы мы не устанавливали никакой связи между порядком $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и номерами занятых линий и порядком поступления вызовов. Поэтому все точки фазового пространства $\omega_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, где $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ — записанные в каком-либо порядке $x_1, x_2, \ldots, x_k$, соответствуют по сути дела одному состоянию системы. Но при изучении марковского процесса нам удобно все эти точки считать различными. Для симметрии марковского процесса в фазовом пространстве удобно предположить, что в случае поступления вызова точка $\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ с одной и той же вероятностью $\frac{1}{k+1}$ может перейти в любую из точек

$$\omega_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_k); \quad i = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Обозначим распределение вероятностей в фазовом пространстве через P_t (при $t = 0$ будем иметь начальное распределение P_0) и стационарное распределение через P. В дальнейшем будем всегда предполагать распределение P_0 на ω_k симметричным по отношению к переменным $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Поэтому P_t также будет обладать этой симметричностью. Введем также обозначения $p_k(t) = P_t(\omega_k)$ и $p_k = P(\omega_k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Распределение вероятностей на траекториях марковского процесса (при каком-нибудь начальном распределении) будем обозначать $\mathscr{P}$.

Теорема 2. *Каково бы ни было распределение P_0, распределение P_t имеет в точке $\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k-мерную плотность $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k; t)$, если $t > \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, причем*

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x\ ; t) \leqslant \frac{\lambda^k}{k!}[1 - F(x_1)]\ldots[1 - F(x_k)]; \ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим через A событие, состоящее в том, что в момент времени t система находится в ω_k в множестве точек, координаты $y_1, y_2, \ldots, y_k$ которых удовлетворяют неравенствам $x_i < y_i < x_i + \Delta_i$; $i = 1, 2, \ldots, k$. Обозначим через B событие, состоящее в том, что в промежутки времени $(t - (x_i + \Delta_i), t - x_i)$; $i = 1, 2, \ldots, k$, произошли вызовы, а начавшиеся при этом разговоры не окончились ко времени t. Ясно, что $A \subseteq B$ при $t > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i$. Поэтому

$$P_t\{\omega_k(y_1, y_2, \ldots, y_k) : x_i < y_i < x_i + \Delta_i; \ i = 1, 2, \ldots, k\} = \mathscr{P}(A) \leqslant \mathscr{P}(B) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}[(1 - F(x_1)]\ldots[1 - F(x_k)]\,\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_k,$$

откуда следует существование плотности $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$ и неравенства (6).

Следствие. *Стационарное распределение P имеет плотности $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$; $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие неравенствам* (6).

Доказательство. Если положить $P_0 = P$, то $P_t \equiv P$ при любом t. Так как t можно взять как угодно большим, то по теореме 2 существует плотность $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ во всем множестве ω_k.

Теорема 3. *Если $F(x)$ имеет конечное математическое ожидание μ, то определенный выше марковский процесс имеет следующее стационарное распределение*

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, p_0[1 - F(x_1)]\ldots[1 - F(x_k)]; \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!}}.$$

Доказательство. Выведем сначала уравнения, которым удовлетворяют функции

$$p_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) = \frac{p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k; t)}{[1 - F(x_1)][1 - F(x_2)] \ldots [1 - F(x_k)]}; \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Для этого выразим распределение вероятностей в момент времени $t + \Delta t$ через распределение вероятностей в момент времени t с помощью формулы полной вероятности. Воспользовавшись марковостью процесса и переходными вероятностями за время Δt, получим

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + \int_0^\infty p_1(x_1; t) \frac{F(x_1 + \Delta t) - F(x_1)}{1 - F(x_1)} dx_1 + o(\Delta t),$$

$$p_1(x_1, t + \Delta t) = p_1(x_1 - \Delta t, t) \frac{1 - F(x_1)}{1 - F(x_1 - \Delta t)} (1 - \lambda \Delta t) +$$

$$+ 2 \int_0^\infty p_2(x_1 - \Delta t, x_2; t) \frac{1 - F(x_1)}{1 - F(x_1 - \Delta t)} \cdot \frac{F(x_2 + \Delta t) - F(x_2)}{1 - F(x_2)} dx_2 + o(\Delta t),$$

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k; t + \Delta t) = p_k(x_1 - \Delta t, x_2 - \Delta t, \ldots, x_k - \Delta t; t) \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - F(x_i)}{1 - F(x_i - \Delta t)} (1 - \lambda \Delta t) +$$

$$+ (k + 1) \int_0^\infty p_{k+1}(x_1 - \Delta t, x_2 - \Delta t, \ldots, x_k - \Delta t, x_{k+1}; t) \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - F(x_j)}{1 - F(x_j - \Delta t)} \times$$

$$\times \frac{F(x_{k+1} + \Delta t) - F(x_{k+1})}{1 - F(x_{k+1})} dx_{k+1} + o(\Delta t),$$

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t + \Delta t) = p_n(x_1 - \Delta t, x_2 - \Delta t, \ldots, x_n - \Delta t, t) \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - F(x_i)}{1 - F(x_i - \Delta t)}.$$

Предположим, что существуют производные $\frac{\partial p_k^*}{\partial t}$, $\frac{\partial p_k^*}{\partial x_i}$; $i = 1, 2, \ldots, k$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогда из этих равенств получается следующая система интегро-дифференциальных уравнений *

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial t} + \lambda p_0^* = \int_0^\infty p_1^*(x_1, t)\, dF(x_1),$$

. . . . . .

$$\frac{\partial p_k^*}{\partial t} + \frac{\partial p_k^*}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial p_k^*}{\partial x_k} + \lambda p_k^* = (k + 1) \int_0^\infty p_{k+1}^*(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}; t)\, dF(x_{k+1}), \tag{9}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial p_n^*}{\partial t} + \frac{\partial p_n^*}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial p_n^*}{\partial x_n} = 0.$$

* При выводе уравнений (9) используется тот факт, что для непрерывной ограниченной функции $g(x)$ и функции распределения $F(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{F(x + t) - F(x)}{t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x).$$

Из соотношений

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k; t)\prod_{i=1}^{k}\frac{1-F(x_i+\Delta t)}{1-F(x_i)}\left(\frac{\lambda\Delta t}{k+1}+o(\Delta t)\right)=$$

$$=p_{k+1}(x_1+\Delta t, \ldots, x_k+\Delta t, 0; t+\Delta t)$$

получаем следующие граничные условия

$$\lambda p_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_k; t)=(k+1)\,p_{k+1}^*(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0; t);\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (10)$$

Если функции (8) соответствуют стационарному распределению, то все производные по t обращаются в нуль и система (9) запишется в следующем виде

$$\lambda p_0^*=\int_0^\infty p_1^*(x_1)\,dF(x_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial p_k^*}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial p_k^*}{\partial x_n}+\lambda p_k^*=(k+1)\int_0^\infty p_{k+1}^*(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})\,dF(x_{k+1}) \quad (11)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial p_n^*}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial p_n^*}{\partial x_n}=0.$$

Наоборот, любое распределение вероятностей, удовлетворяющее системе (11) и граничным условиям (10), есть стационарное распределение. Решением системы (11) с условиями (10) является

$$p_k^*=p_0\frac{\lambda^k}{k!};\ k=0, 1, 2, \ldots, n. \quad (12)$$

Это легко проверить подстановкой. Поэтому распределение (7) будет стационарным. При этом p_0 определяется из условия нормировки

$$p_0+p_1+\ldots+p_n=p_0+\int_0^\infty p_1(x)\,dx+\ldots+\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=p_0\left[1+\lambda\int_0^\infty[1-F(x_1)]\,dx_1+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty[1-F(x_1)]\ldots[1-F(x_n)]\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\right]=p_0\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda\mu)^k}{k!}=1.$$

Доказательство единственности и эргодичности этого стационарного распределения будет следовать из теоремы 1.

§ 3. Доказательство единственности и эргодичности стационарного распределения

Покажем теперь, что рассматриваемый марковский процесс удовлетворяет условию теоремы 1. Ниже все время будем придерживаться следующих обозначений. Обозначим через C_l множество, состоящее из точек ω_0 и $\{\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k);\ 0\leqslant x_i\leqslant l;\ i=1, 2, \ldots, k\};\ k=1, 2, \ldots, n$. За распределение вероятностей R примем стационарное распределение, определенное формулами (7).

Теорема 4. *Каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует такое $l>0$, что при любом начальном распределении P_0 найдется t_0, так что при $t\geqslant t_0$*

$$P_t(C_l)\geqslant 1-\varepsilon.$$

Доказательство.* Покажем, что, подбирая $l>0$ по $\varepsilon>0$ и t_0 по P_0, всегда можно добиться того, что при $t \geqslant t_0$ вероятность попадания в дополнение к множеству C_l не превосходит ε, т. е.

$$P_t(\overline{C}_l) \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим через ξ_{it} случайную величину, равную нулю, если в момент t линия с номером i свободна, и равную времени, прошедшему с начала разговора до момента t, если i-я линия занята. Функцию распределения ξ_{it} обозначим через $G_t(x)$. Функцию распределения $G_0(x)$ можно выразить через распределение P_0. Все ξ_{it}; $i=1, 2, \ldots, n$, имеют одну и ту же функцию распределения $G_t(x)$. Нетрудно видеть, что

$$P_t(\overline{C}_l) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_{it} > l\}.$$

Покажем, как по $\varepsilon>0$ нужно выбрать $l>0$ и по P_0, вернее по $G_0(x)$, число t_0, чтобы при $t \geqslant t_0$

$$\mathbf{P}\{\xi_{it} > l\} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}. \tag{13}$$

Пусть $t>l$. Оценим в правой части равенства

$$\mathbf{P}\{\xi_{it} > l\} = \int_{l}^{t} dG_t(x) + \int_{t}^{t+l_1} dG_t(x) + \int_{t+l_1}^{\infty} dG_t(x)$$

три интеграла. Аналогично тому, как это делалось в теореме 2, можно показать, что

$$\int_{l}^{t} dG_t(x) \leqslant \lambda \int_{l}^{t} [1-F(x)]\,dx \leqslant \lambda \int_{l}^{\infty} [1-F(x)]\,dx.$$

При $x>t$ функция $G_t(x)$ следующим образом выражается через $G_0(x)$

$$dG_t(x) = \frac{1-F(x)}{1-F(x-t)}\,dG_0(x-t).$$

Поэтому

$$\int_{t}^{t+l_1} dG_t(x) = \int_{t}^{t+l_1} \frac{1-F(x)}{1-F(x-t)}\,dG_0(x-t) \text{ и } \int_{t+l_1}^{\infty} dG_t(x) = \int_{t+l_1}^{\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(x-t)}\,dG_0(x-t).$$

Пусть дано $\varepsilon>0$. Выберем l так, чтобы

$$\lambda \int_{l}^{\infty} [1-F(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{3n}. \tag{14}$$

В силу сходимости интеграла $\int_{0}^{\infty} [1-F(x)]\,dx = \mu$ это всегда возможно. Выберем l_1 так, чтобы $\int_{l_1}^{\infty} dG_0(x) < \frac{\varepsilon}{3n}$, и t_0 так, чтобы $\frac{1-F(t_0)}{1-F(l_1)} < \frac{\varepsilon}{3n}$. Тогда при $t>t_0$

$$\begin{aligned} &\int_{t}^{t+l_1} \frac{1-F(x)}{1-F(x-t)}\,dG_0(x-t) \leqslant \frac{1-F(t)}{1-F(l_1)} \leqslant \frac{1-F(t_0)}{1-F(l_1)} < \frac{\varepsilon}{3n}, \\ &\int_{t+l_1}^{\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(x-t)}\,dG_0(x-t) \leqslant \int_{t+l_1}^{\infty} dG_0(x-t) = \int_{l_1}^{\infty} dG_0(x) < \frac{\varepsilon}{3n}. \end{aligned} \tag{15}$$

* При доказательстве теорем 4 и 5 предполагается, что $F(x)<1$ при любом $0 \leqslant x < \infty$. Видоизменения доказательства для случая $F(x)=1$ при $x \geqslant x_0$ почти очевидны.

Из (14) и (15) следует неравенство (13), и, следовательно, справедливость теоремы.

Теорема 5. *Существуют такие* $t_1 > 0$ *и* $k > 0$, *что для любых точек* $x \in C_l$, $l > 0$ *и измеримых множеств* $A \subseteq C_l$ *выполняется неравенство*

$$P(x, t_1, A) \geqslant kR(A). \tag{16}$$

Доказательство. Выберем t_2 так, чтобы $F(t_2) - F(l) = \eta > 0$, $t_3 > l$ и положим $t_1 = t_2 + t_3$. Покажем, что неравенство (16) выполняется для $k = \eta^n e^{-\lambda t_1}$.

Так как

$$P(x, t_1, A) \geqslant P(x, t_2, \omega_0)\, P(\omega_0, t_3, A),$$

то нам достаточно показать, что при $x \in C_l$ и для измеримых $A \subseteq C_l$

$$P(x, t_2, \omega_0) \geqslant \eta^n e^{-\lambda t_2} \tag{17}$$

и

$$P(\omega_0, t_3, A) \geqslant e^{-\lambda t_3} R(A). \tag{18}$$

Пусть $x = \omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in C_l$. Тогда

$$P(x, t_2, \omega_0) \geqslant e^{-\lambda t_2} \prod_{i=1}^{k} \frac{F(t_2 + x_i) - F(x_i)}{1 - F(x_i)} \geqslant e^{-\lambda t_2} \eta^k \geqslant e^{-\lambda t_2} \eta^n,$$

так как событие, вероятность которого написана слева, включает в себя событие состоящее в том, что за время t_2 не произошло ни одного вызова и все ведшиеся разговоры окончились.

При $t > l$ по теореме 2 в C_l существуют плотности $p(\omega_0, t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ перехода из ω_0 в $\omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Покажем, что

$$p(\omega_0, t_3, x_1, x_2, \ldots, x_k) \geqslant e^{-\lambda t_3} \frac{\lambda^k}{k!} [1 - F(x_1)] \ldots [1 - F(x_k)]. \tag{19}$$

откуда будет следовать (18).

Пусть при $t = 0$ система находится в состоянии ω_0. Обозначим через A событие, состоящее в том, что в момент времени t_3 ведется k разговоров, начавшихся в промежутках времени $(t_3 - x_i - dx_i,\ t_3 - x_i)$; $i = 1, 2, \ldots, k$. Через B обозначим событие, состоящее в том, что в интервалах $(t_3 - x_i - dx_i,\ t_3 - x_i)$; $i = 1, 2, \ldots, k$ началось k разговоров, причем ни один из них по времени t_3 не кончился и других вызовов не было. Так как $A \supseteq B$, то

$$p(\omega_0, t_3, x_1, \ldots, x)\, dx_1, \ldots, dx_k = \mathscr{P}(A) \geqslant \mathscr{P}(B) =$$

$$= e^{-\lambda t_3} \frac{\lambda^k}{k!} [1 - F(x_1)] \ldots [1 - F(x_k)]\ dx_1 \ldots dx_k,$$

откуда следует (19) и (18). Теорема доказана.

Теорема 6. *Существует такое число* $K > 0$, *что каково бы ни было начальное распределение* P_0 *при* $t > l$ *и любом измеримом* $A \subseteq C_l$

$$P_t(A) \leqslant KR(A).$$

Доказательство. Это неравенство справедливо при $K = \dfrac{1}{p_0} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(\lambda\mu)^k}{k!}$. Это сразу следует из неравенства (6) теоремы 2 и равенств (7), определяющих стационарное распределение R.

Теоремы 4, 5 и 6 показывают, что эргодическая теорема § 1 применима к изучаемому марковскому процессу. Следовательно, стационарное распределение (7) единственно и эргодично. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to \infty} p_k(t) = p_k = \frac{\dfrac{(\lambda\mu)^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{(\lambda\mu)^i}{i!}}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Поступила в редакцию
30. 10. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. I. D o o b, Asymptotic properties of Markoff transition probabilities, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948), 393—421.

[2] А. М. Я г л о м, О статистической обратимости брауновского движения, Матем. сб., **24**(66), № 3 (1949), 457—492.

[3] А. Я. Х и н ч и н, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Математ. ин-та им. В. А. Стеклова, XLIX, 1955.

[4] R. F o r t e t, Calcul des probabilités, Centre national de la recherche scientifique, 1950.

AN ERGODIC THEOREM FOR MARKOV PROCESSES AND ITS APPLICATION TO TELEPHONE SYSTEMS WITH REFUSALS

B. A. SEVASTJANOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $P(x, t, A)$ be the probability of transition from state $x \in \Omega$ to measurable set A in time t of a homogeneous Markov process in space Ω. Let $P_t(A)$ be the probability that the system is in measurable set A at moment t if at $t = 0$ distribution P_0 is valid. Stationary distribution P is called ergodic if for each initial distribution P_0, variation $V(P_t - P) \to 0$ for $t \to \infty$.

The following ergodic theorem is proved:

Theorem 1. A Markov process homogeneous in time has a unique stationary probability distribution which is ergodic if for any $\varepsilon > 0$ there exists measurable set C, probability distribution R in Ω and values $t_1 > 0$, $k > 0$, $K > 0$ such that

1) $kR(A) \leqslant P(x, t_1, A)$ for all points $x \in C$ and measurable sets $A \subset C$;

for any initial distribution P_0 there exists a t_0, such that for any $t \geqslant t_0$

2) $P_t(C) \geqslant 1 - \varepsilon$

3) $P_t(A) \leqslant KR(A) + \varepsilon$ for any measurable set $A \subset C$.

This theorem is used to substantiate Erlang's formulas (5) for the case of an arbitrary distribution law for the duration of conversation with a finite mean value.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ

А. И. КОРОНКЕВИЧ

Обычно при линейном экстраполировании или фильтрации стационарной случайной функции $\xi(t)$ точность решения оценивается величиной средней квадратичной ошибки σ_τ^2, имеющей размерность квадрата самой функции ξ (см. [1]). В ряде случаев, однако, удобнее оценивать эту точность некоторыми безразмерными характеристиками.

Простейшей из таких безразмерных характеристик будет величина

$$N = \frac{\sigma_{\max}^2 - \sigma_\tau^2}{\sigma_{\max}^2}, \tag{1}$$

где

$$\sigma_{\max}^2 = \mathbf{M} \mid \xi(t) - \mathbf{M}\xi(t) \mid^2 = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{2}$$

[$B(\tau)$ — корреляционная функция процесса ξ, $f(\lambda)$ — его спектральная плотность] — максимальное значение ошибки σ_τ^2, соответствующее случаю, когда кроме знания константы $\mathbf{M}\xi(t)$ мы не имеем никакой информации относительно значения $\xi(t)$ в прошлом. Величина N, очевидно, характеризует степень точности рассматриваемого экстра-

полирования или фильтрации; она может изменяться в пределах от 0 (когда линейное экстраполирование или фильтрация ничего не дает) до 1 (в случае точного прогноза или фильтрации, когда $\sigma_\tau^2 = 0$). В дальнейшем будем называть эту величину критерием точности экстраполирования (фильтрации). Если выразить σ_τ^2 через спектральную характеристику экстраполирования $\Phi_\tau^э(\lambda)$ (см. [1]), получим:

$$N_э = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^э(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda}{B(0)}. \tag{3}$$

Аналогично для фильтрации, обозначая $\xi(t)$ — полезный сигнал, $\eta(t)$ — шум, $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ — искаженный сигнал (случайные стационарные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ предполагаются некоррелированными):

$$N_ф = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^ф(\lambda)|^2 f_{\zeta\zeta}(\lambda)\, d\lambda}{B_{\xi\xi}(0)}. \tag{4}$$

В случае фильтрации желательно иногда еще численно характеризовать искажающее действие помех. Для этой цели может быть использована величина

$$S = \frac{N_э - N_ф}{N_э}, \tag{5}$$

где $N_э$ и $N_ф$ — соответственно значения критериев точности экстраполирования и фильтрации при одной и той же величине τ. В дальнейшем S будет именоваться критерием искажения; этот критерий показывает относительное уменьшение точности прогноза при наличии случайных помех. Подставляя (1), получим

$$S = \frac{\sigma_{\tau,ф}^2 - \sigma_{\tau,э}^2}{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{\tau,э}^2} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^э(\lambda)|^2 f_{\xi\xi}(\lambda)\, d\lambda - \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^ф(\lambda)|^2 f_{\zeta\zeta}(\lambda)\, d\lambda}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^э(\lambda)|^2 f_{\xi\xi}(\lambda)\, d\lambda}. \tag{6}$$

Здесь, как и в дальнейшем, индекс «ф» (соответственно «э») указывает, что имеется в виду фильтрация (экстраполирование).

Очевидно, если возможно полное отделение помех, $\sigma_{\tau,ф}^2 = \sigma_{\tau,э}^2$ и $S = 0$. Поскольку $\sigma_{\tau,э}^2 \leqslant \sigma_{\tau,ф}^2 \leqslant \sigma_{\max}^2$, величина критерия искажения лежит в пределах $0 \leqslant S \leqslant 1$. В случае фильтрации с запаздыванием $S = 1 - N_ф$.

Для случайных последовательностей (процессов с дискретным временем) интегрирование в (3), (4) и (6) должно производиться, очевидно, в пределах от $-\pi$ до π.

Помимо характеристики шума по его влиянию на увеличение средней квадратичной ошибки прогноза, представляется интересным сравнить искажающее действие шума с действием на тот же случайный процесс другого шума, принятого в качестве эталона сравнения. В качестве такого эталона можно принять белый шум со спектральной плотностью $f_{\eta\eta}^б(\lambda) = \varepsilon^2$, равной, например, $f_{\eta\eta}(0)$, т. е. значению спектральной плотности сравниваемого шума при $\lambda = 0$. Отношение величины критерия точности фильтрации при действии шума к величине критерия точности $N_ф^б$ фильтрации при действии эталонного белого шума

$$W = \frac{N_ф}{N_ф^б} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^ф(\lambda)|^2 f_{\zeta\zeta}(\lambda)\, d\lambda}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau^ф(\lambda)|^2 f_{\zeta\zeta}^б(\lambda)\, d\lambda} \tag{7}$$

назовем критерием или степенью «белизны» данного шума относительно данного случайного процесса. Индекс «б» означает, что соответствующие величины определены для случая, когда действует белый шум со спектральной плотностью $\varepsilon^2 = f_{\eta\eta}(0)$. Величины N_Φ и $N_\Phi^б$ вычисляются для одного и того же значения τ.

В тех случаях, когда практическое осуществление экстраполирования (или фильтрации) при помощи электрической схемы требует предварительной аппроксимации истинной спектральной характеристики $\Phi_\tau^э(\lambda)$ или $\Phi_\tau^Ф(\lambda)$ более простой рациональной функцией $\widetilde{\Phi}_\tau(\lambda)$, замена $\Phi_\tau(\lambda)$ на $\widetilde{\Phi}_\tau(\lambda)$ вызывает дополнительное искажение результатов прогноза, которое можно оценить следующим критерием аппроксимации:

$$A_\Phi = \frac{N_\Phi^A}{N_\Phi}; \quad A_э = \frac{N_э^A}{N_э}, \tag{8}$$

где N_Φ (соответственно $N_э$) — величина критерия, подсчитанного для функции $\Phi_\tau(\lambda)$; N_Φ^A ($N_э^A$) — для аппроксимирующей функции $\widetilde{\Phi}_\tau(\lambda)$.

С целью иллюстрации рассмотрим значение введенных критериев для некоторых примеров экстраполирования и фильтрации, приведенных в работе [1].

1. Экстраполирование случайного процесса с корреляционной функцией $B(\tau) = ce^{-\alpha_1\tau}$. В этом случае (см. [1], стр. 122) $\sigma_\tau^2 = c(1 - e^{-2\alpha_1\tau})$, т. е. $N_э = e^{-2\alpha_1\tau}$.

Таким образом, при увеличении срока прогноза критерий точности убывает со скоростью показательной функции. Зная величину α_1, легко в каждом конкретном примере решить вопрос о практически целесообразном пределе величины срока прогноза.

2. На рассмотренный в примере 1 случайный процесс налагается белый шум со спектральной плотностью $f_{\eta\eta}^б(\lambda) = \varepsilon^2$. В этом случае (см. [1], стр. 139): $\sigma_\tau^2 = c\left(1 - \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1 + \alpha_1} e^{-2\alpha_1\tau}\right)$; $\beta_1^2 = \frac{c_1}{\varepsilon^2} + \alpha_1^2$; и следовательно,

$$N_\Phi = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1 + \alpha_1} e^{-2\alpha_1\tau}, \tag{9}$$

$$S = \frac{2\alpha_1}{\beta_1 + \alpha_1}. \tag{10}$$

При неограниченном увеличении ε^2 шум заглушает полезный сигнал. Действительно, при этом $\beta_1 \to \alpha_1$; $N_\Phi \to 0$; $S \to 1$.

3. Пусть $f_{\xi\xi}(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^2 + \alpha_1^2}$; $f_{\eta\eta}(\lambda) = \frac{c_2}{\lambda^2 + \alpha_2^2}$. Тогда, используя данные примера, рассмотренного в [1], стр. 136, получим

$$N_\Phi = \frac{c_1}{c_1 + c_2}\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\beta + \alpha_1}\right)^2 e^{-2\alpha_1\tau}, \qquad \beta^2 = \frac{c_1\alpha_2^2 + c_2\alpha_1^2}{c_1 + c_2}, \tag{11}$$

$$S = 1 - \frac{c_1}{c_1 + c_2}\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\beta + \alpha_2}\right)^2. \tag{12}$$

В частном случае, когда $c_1 = c_2$; $\alpha_1 = \alpha_2$, получаем, как это логично было бы предположить, $S = 0{,}5$. Определим для этого частного случая величину критерия «белизны». Найдем прежде всего значение $N_\Phi^б$ — величину критерия точности при действии белого шума со спектральной плотностью $\varepsilon^2 = f_{\eta\eta}(0) = \frac{c_2}{\alpha_2^2}$. Легко получить (см. [9]):

$N_\Phi = 0{,}171\, e^{-2\alpha_1\tau}$ и $W = \frac{0{,}5}{0{,}171} = 2{,}92$.

По определению критериев S и W ясно, что их значение зависит, вообще говоря, от срока прогноза τ. Однако в рассмотренных примерах и в ряде других практически важных случаях величина этих критериев оказывается независимой от τ и, таким образом, величины S и W оказываются постоянными, характеризующими данную совокупность случайного процесса и шума. Выясним, при каких условиях это имеет место.

Как известно [1], в общем случае, если спектральная плотность выражается функцией, рациональной относительно λ, она может быть представлена в виде

$$f_{\xi\xi}(\lambda) = \frac{A_1 |(\lambda-\beta_1)\dots(\lambda-\beta_K|^2}{|(\lambda-\alpha_1)\dots(\lambda-\alpha_L)|^2}. \tag{13}$$

Пусть (13) — спектральная плотность неискаженного случайного процесса. Спектральную плотность случайного процесса, искаженного действующими помехами, запишем в виде:

$$f_{\zeta\zeta}(\lambda) = f_{\xi\xi}(\lambda) + f_{\eta\eta}(\lambda) = \frac{A_2 |(\lambda-r_1)\dots(\lambda-r_M)|^2}{|(\lambda-q_1)\dots(\lambda-q_N)|^2}. \tag{14}$$

В выражениях (13,14) $A_1 > 0$; $A_2 > 0$ и степени многочленов, стоящих в знаменателях, больше степеней числителей, т. е. $L > K$; $N > M$. Далее, поскольку все корни многочленов комплексно-сопряженные, занумеруем их так, чтобы корни α_i; β_i; r_i; q_i имели положительную мнимую часть (следовательно, корни $\overline{\alpha_i}$; $\overline{\beta_i}$; $\overline{r_i}$; $\overline{q_i}$ будут иметь отрицательную мнимую часть).

Приведем соответствующие общие выражения для спектральной характеристики, данные в работе [1], для случая, когда среди корней α_i нет кратных.

В случае экстраполирования (шум отсутствует):

$$\Phi_\tau^{\ni}(\lambda) = \frac{(\lambda-\alpha_1)\dots(\lambda-\alpha_L)}{(\lambda-\beta_1)\dots(\lambda-\beta_K)} \sum_{k=1}^{L} \frac{c_k e^{i\alpha_k\tau}}{\lambda-\alpha_k}. \tag{15}$$

В случае фильтрации:

$$\Phi_\tau^{\Phi}(\lambda) = \frac{A_1(\lambda-q_1)\dots(\lambda-q_N)}{A_2(\lambda-r_1)\dots(\lambda-r_M)} \sum_{k=1}^{L} \frac{d_k e^{i\alpha_k\tau}}{\lambda-\alpha_k}. \tag{16}$$

Согласно (2,3,4,6) получим общее выражение для критерия искажения:

$$S = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{L} \frac{c_k e^{i\alpha_k\tau}}{\lambda-\alpha_k} \right|^2 d\lambda - \frac{A_1}{A_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{L} \frac{d_k e^{i\alpha_k\tau}}{\lambda-\alpha_k} \right|^2 d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{L} \frac{c_k e^{i\alpha_k\tau}}{\lambda-\alpha_k} \right|^2 d\lambda}. \tag{17}$$

Используя выражение (17), легко получить, что независимость критерия S от срока прогноза τ будет иметь место в следующих случаях:

1. Если спектральные плотности случайного процесса и шума совпадают с точностью до постоянного множителя.

2. Если спектральные плотности случайного процесса и шума имеют вид:

$$f_{\xi\xi}(\lambda) = \frac{A_1}{|\lambda-\alpha_1|^2}, \tag{18}$$

$$f_{\eta\eta}(\lambda) = \frac{B_1 |(\lambda-\gamma_1)\dots(\lambda-\gamma_E)|^2}{|(\lambda-\delta_1)\dots(\lambda-\delta_F)|^2}, \text{ где } A_1 > 0;\ B_1 > 0;\ F > E;\ \operatorname{Im}\alpha_1 > 0. \tag{19}$$

3. Если на случайный процесс со спектральной плотностью вида (18) действует белый шум со спектральной плотностью ε^2. Действительно, в этом случае спектральная плотность искаженного процесса

$$f_{\zeta\zeta}(\lambda) = \varepsilon^2 \frac{|\lambda-\beta_1|^2}{|\lambda-\alpha_1|^2}. \tag{20}$$

Заметим, что в общем случае α_1 и β_1 — комплексные величины.

Спектральная характеристика фильтрации, как легко убедиться, имеет вид:

$$\Phi_{\tau}^{\Phi}(\lambda) = \frac{A_1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} \cdot \frac{1}{\lambda - \beta_1} e^{i\alpha_1 \tau}. \tag{21}$$

Спектральная характеристика экстраполирования (см. [1])

$$\Phi_{\tau}^{\Phi}(\lambda) = e^{i\alpha_1 \tau}. \tag{22}$$

Применяя формулу (6), убедимся, что критерий искажения — постоянная величина.

Заметим, что для случайного процесса, спектральная плотность которого имеет вид (18), где $\alpha_1 = \alpha_1' + i\alpha_1''$ — комплексная величина, корреляционная функция равна

$$B(\tau) = ce^{-\alpha_2'' |\tau| + i\alpha_1' \tau}. \tag{23}$$

В частности, к этому виду относится вещественный марковский процесс, который будет иметь место, если $\alpha_1' = 0$ и случайный процесс — нормальный.

Итак, для каждого шума, спектральная плотность которого — рациональная функция λ, т. е. имеет вид (19) в сочетании со случайным процессом, имеющим спектральную плотность вида (18), имеет место постоянство критерия искажения.

В этом случае имеет место также постоянство критерия «белизны», как это следует непосредственно из формулы (7) и выражений для соответствующих спектральных характеристик (16,21) и спектральных плотностей (14,20).

Постоянство введенных критериев, как это следует из их определения, означает наличие линейной зависимости между величинами соответствующих средних квадратичных ошибок.

Так, из (6) и (2) непосредственно убеждаемся, что имеет место следующая

Теорема 1. *Если стационарный случайный процесс имеет спектральную плотность вида*

$$f_{\xi\xi}(\lambda) = \frac{A_1}{|\lambda - \alpha_1|^2}, \tag{18}$$

а спектральная плотность случайных помех (шума) выражается функцией, рациональной относительно λ или постоянна (белый шум);

либо, если спектральные плотности случайного процесса и шума совпадают с точностью до постоянного множителя,—

то имеет место линейная зависимость между средней квадратичной ошибкой экстраполирования $(\sigma_{\tau,\ э}^2)$ и средней квадратичной ошибкой фильтрации $(\sigma_{\tau,\ ф}^2)$ при одинаковых величинах $\tau \geqslant 0$:

$$\sigma_{\tau,\ ф}^2 = SB_{\xi\xi}(0) + (1 - S)\,\sigma_{\tau,\ э}^2. \tag{24}$$

Величина S — постоянная для данной совокупности случайного процесса и шума $0 \leqslant S \leqslant 1$.

Аналогично, из определения критерия точности фильтрации и критерия «белизны» (7), следует:

Теорема 2. *Для стационарного случайного процесса со спектральной плотностью вида* (18) *имеет место линейная зависимость между средней квадратичной ошибкой фильтрации при действии данного шума, спектральная плотность которого $f_{\eta\eta}(\lambda)$ — рациональная функция λ, $(\sigma_{\tau,\ ф}^2)$, и средней квадратичной ошибкой фильтрации при действии на тот же случайный процесс белого шума $(\sigma_{\tau,\ ф\ (б)}^2)$ при одинаковых величинах $\tau \geqslant 0$:*

$$\sigma_{\tau,\ ф}^2 = V\,\sigma_{\tau,\ ф\ (б)}^2 - (V-1)B_{\xi\xi}(0). \tag{25}$$

Коэффициент V для данной совокупности случайного процесса, шума и данной величины спектральной плотности белого шума ε^2 является постоянной величиной. При этом, если $\varepsilon^2 = f_{\eta\eta}(0)$, коэффициент V не что иное, как критерий «белизны» W. При $\varepsilon^2 > f_{\eta\eta}(0)$, $V > W$; при $\varepsilon^2 < f_{\eta\eta}(0)$, $V < W$. При $\varepsilon^2 = 0$ имеем $\sigma_{\tau,\ ф\ (б)}^2 = \sigma_{э}^2$; $N_{ф}^{б} = N_{э}$ и из (5,7) получаем в этом случае $V = 1 - S$, так что формула (25) переходит в (24).

В заключение отметим, что введенные безразмерные критерии, характеризующие случайный процесс или совокупность случайного процесса и случайных помех по отношению к методам прогноза, могут, как нам кажется, иметь значение критериев подобия в соответствующих задачах моделирования.

Поступила в редакцию
1. 7. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, Усп. мат. наук, VII, вып. 5 (51) (1952), 3—168.

[2] В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехтеоретиздат, М. — Л., 1952.

SOME REMARKS ON EVALUATING THE ACCURACY OF LINEAR EXTRAPOLATION AND FILTRATION

A. I. KORONKEVIČ (LVOV)

(*Summary*)

This paper considers linear extrapolation and filtration of random stationary functions $\xi(t)$; $M\xi(t)$ is assumed to be equal to zero. It is proposed to evaluate results by means of two values, $\sigma^2_{\tau,\ э}$ or $\sigma^2_{\tau,\ ф}$ — the mean square error of extrapolation (filtration) and $N = \dfrac{M|\xi(t)|^2 - \sigma^2_\tau}{M|\zeta(t)|^2}$, called the accuracy criterion of extrapolation $N_э$ or filtration ($N_ф$), respectively. The forecast time is τ. Distortion criterion $S = \dfrac{N_э - N_ф}{N_э}$ is introduced to evaluate the effect of noise.

The following theorems are proved!

Theorem 1. *If a random stationary function has a spectral density* $f_{\xi\xi}(\lambda) = \dfrac{A}{|\lambda - \alpha|^2}$, *and the spectral density of chance noises* $f_{\eta\eta}(\lambda)$ *is a rational function, or if* $f_{\xi\xi}(\lambda) = cf_{\eta\eta}(\lambda)$ (*where c is a constant*), *then for* $\tau \geqslant 0$, *the linear relation* $\sigma^2_{\tau,\ ф} = sM|\xi(t)|^2 + (1-s)\sigma^2_{\tau,\ э}$ *is valid* (*where s is a constant for given random functions* $\xi(t)$ *and* $\eta(t)$).

Theorem 2. *If* $f_{\xi\xi}(\lambda) = \dfrac{A}{|\lambda - \alpha|^2}$ *and* $f_{\eta\eta}(\lambda)$ *is a rational function, then for* $\tau \geqslant 0$ *the linear relation* $\sigma^2_{\tau,\ ф} = V\sigma^2_{\tau,\ ф\ (б)} - (V-1)M|\xi(t)|^2$ *holds true, where* $\sigma^2_{\tau,\ ф\ (б)}$ *is the mean square error of filtration with white noise. For given random functions* $\xi(t)$, $\eta(t)$ *and white noise* $\eta^{(б)}(t)$ V *is a constant.*

ЗАМЕЧАНИЕ О ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КЛАССА L

И. А. ИБРАГИМОВ

Некоторое время существовало мнение [1], что распределения класса L одновершинны. Впоследствии Чжун [2] показал, что такое мнение не имеет достаточных оснований; однако он не привел примеров неодновершинных распределений класса L.

В данной заметке рассматривается построение таких примеров.

Как известно [1], логарифм характеристической функции $f(t)$ распределения класса L может быть представлен формулой Леви

$$\log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} dM(u) + \int_{0}^{\infty} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} dN(u), \quad (1)$$

причем функции $M(u)$ и $N(u)$ при каждом значении u имеют правую и левую производные, а функции

$$uM'(u) \quad (u < 0)$$
$$uN'(u) \quad (u > 0)$$

не возрастают.

Теорема. *Среди распределений класса L, логарифм характеристической функции которых определяется по формуле Леви функциями*

$$M(u) \equiv 0,$$

$$N(u) = \begin{cases} \lambda \ln u, & u \leqslant 1, \\ 0, & u > 1, \end{cases}$$

с $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ имеются неодновершинные.

Доказательство. Заметим сначала, что наши распределения действительно принадлежат классу L, так как

$$uM'(u) \equiv 0,$$

$$uN'(u) = \begin{cases} \lambda, & u < 1 \\ 0, & u > 1 \end{cases}$$

не возрастают соответственно в $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Используя формулу (1) и полагая $\sigma = 0$, логарифм характеристической функции наших распределений можно записать в виде

$$\log f_\lambda(t) = i\gamma t + \lambda \int_0^1 \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{du}{u} =$$

$$= i\gamma_1 t + \lambda \int_0^1 \frac{e^{itu} - 1}{u}\, du.$$

Мы будем предполагать $\gamma_1 = 0$, так что

$$f_\lambda(t) = \exp\left\{ \lambda \int_0^1 \left\{ \frac{e^{itu} - 1}{u}\, du \right\} \right\} = \exp\left\{ \lambda \int_0^t \frac{e^{iu} - 1}{u}\, du \right\}. \tag{2}$$

Доказательство теоремы будем вести от противного. В дальнейшем употребляются следующие обозначения: $f_\lambda(t)$ — характеристическая функция; $F_\lambda(x)$, $y_\lambda(x)$ — соответствующие ей функция распределения и плотность; a_λ — вершина распределения $F_\lambda(x)$.

Для удобства изложения все доказательство разбито на несколько пунктов. Итак, пусть все распределения класса L одновершинны.

1°. При $t > 1$

$$f_\lambda(t) = t^{-\lambda} \exp\left\{ i\lambda \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du - \lambda \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u}\, du + \lambda \int_1^t \frac{\cos u}{u}\, du \right\} =$$

$$= t^{-\lambda} \exp\{ h_{1\lambda}(t) + i h_{2\lambda}(t) \}, \tag{3}$$

и $|h_{1\lambda}(t)| \leqslant K$, K — некоторое положительное число, не зависящее от λ. Это утверждение очевидно. Аналогично, при $t \to -\infty$

$$|f_\lambda(t)| = O(|t|^{-\lambda}). \tag{3'}$$

2°. Если $\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$ вершина распределения $F_\lambda(x)$ лежит в нуле.

Пусть a_λ — вершина распределения $F_\lambda(x)$. В силу одной теоремы А. Я. Хинчина [1]

$$f_\lambda(t)\, e^{-ia_\lambda t} = \frac{1}{t} \int_0^t v(t)\, dt, \tag{4}$$

где $v(t)$ — характеристическая функция. Из (4) получаем, дифференцируя,

$$v(t) = \exp\left\{ -ia_\lambda t + \lambda \int_0^1 \frac{e^{iut} - 1}{u}\, du \right\} \left(1 - \lambda - ia_\lambda t + \lambda\, \frac{e^{it} - 1}{t}\right)$$

Отсюда, если учесть (3), получается для больших t

$$|v(t)| \geqslant t^{-\lambda} e^{-K} \left| a_\lambda t - \lambda \frac{\sin t}{t} \right|_{t \to \infty} \to \infty,$$

если $a_\lambda \neq 0$, а $\lambda < 1$. Если, наконец, $\lambda = 1$, то

$$f_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda \to 1-0]{} f_1(t),$$
$$F_\lambda(x) \xRightarrow[\lambda \to 1-0]{} F_1(x)$$

и, следовательно, ([1])

$$a_1 = \lim_{\lambda \to 1-0} \sup a_\lambda = 0.$$

3°. При $\lambda > 1$ функция распределения $F_\lambda(x)$ имеет непрерывную плотность $y_\lambda(x)$ и для $x < 0$

$$y_\lambda(x) = 0. \tag{5}$$

Ввиду (3) и (3′) существование $y_\lambda(x)$ очевидно. Можно написать, что

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_\lambda(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-itx} f_\lambda(t)\, dt. \tag{6}$$

Покажем, что при $x < 0$ в (6) можно повернуть контур интегрирования против часовой стрелки на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Для этого достаточно обнаружить, что при $x < 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left\{ -ixRe^{i\varphi} + \lambda \int_0^1 \frac{e^{iRe^{i\varphi}u} - 1}{u}\, du \right\} iRe^{i\varphi} d\varphi \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Очевидно,

$$|I| \leqslant R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left\{ -|x| R \sin\varphi + \lambda \int_0^1 \frac{e^{-Ru\sin\varphi} \cos(Ru\cos\varphi) - 1}{u}\, du \right\} d\varphi.$$

Нетрудно проверить, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ равномерно относительно φ

$$\exp\left\{ \lambda \int_0^1 \frac{e^{-Ru\sin\varphi} \cos(Ru\cos\varphi) - 1}{u}\, du \right\} = O(R^{-\lambda}).$$

Поэтому

$$|I| \leqslant K_1 R^{1-\lambda} + K_2 R e^{-R|x|\sin\varphi_0},$$

где K_1, K_2 — некоторые не зависящие от R положительные постоянные, и, значит, при $x < 0$

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} i \int_0^{\infty} e^{-t|x|} e^{\lambda \int_0^1 \frac{e^{-tu} - 1}{u} du}\, dt = 0.$$

4°. При $\lambda > 1$ $y_\lambda(x)$ удовлетворяет дифференциально разностному уравнению

$$xy'_\lambda(x) = (\lambda - 1)\, y_\lambda(x) - \lambda y_\lambda(x - 1). \tag{7}$$

В самом деле, заменяя в (6) tx на s, умножая обе части на x и дифференцируя по x, найдем

$$(xy_\lambda(x))' = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp\left\{-is+\lambda\int_0^1 \frac{e^{i\frac{s}{x}u}-1}{u}\,du\right\}\lambda\,\frac{1-e^{i\frac{s}{x}u}}{x}\,ds =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp\left\{-itx+\lambda\int_0^1 \frac{e^{itu}-1}{u}\,du\right\}(1-e^{it})\,dt. \qquad (8)$$

Дифференцирование под знаком интеграла здесь допустимо, так как последний интеграл в (8) сходится равномерно относительно x. Нетрудно видеть, что (8) эквивалентно (7).

5°. Теперь уже легко показать, что предположение об одновершинности всех распределений $F_\lambda(x)$ ведет к противоречию.

В самом деле, пусть, как и раньше, a_λ — вершина распределения $F_\lambda(x)$. Так как при $\lambda \to 1+0$

$$f_\lambda(t) \to f_1(t),$$

$$F_\lambda(x) \Rightarrow F_1(x),$$

можно считать, что $a_\lambda \to a_1 = 0$ $(n\cdot 2°)$. Пусть $a_\lambda < \frac{1}{2}$ для какого-то $\lambda > 1$, тогда, учитывая (5) и (7), получим

$$a_\lambda y'_\lambda(a_\lambda) = (\lambda-1)\,y_\lambda(a_\lambda),$$

a_λ — вершина, поэтому $y'_\lambda(a_\lambda) = 0$,

$$y_\lambda(a_\lambda) = 0,$$

$$y_\lambda(x) \equiv 0.$$

Это, очевидно, невозможно.

Поступила в редакцию
22.2.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М—Л., 1949.

[2] K. L. Chung, Sur le lois de probabilité unimodales, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 236, No. 6 (1953), 583—584.

REMARK ON A PROBABILITY DISTRIBUTION OF CLASS L

I. A. IBRAGIMOV (LENINGRAD)

(Summary)

An example of not-unimodal probability distribution of class L is given.

НОМОГРАММА, СВЯЗЫВАЮЩАЯ ПАРАМЕТРЫ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ ПРИ КЛАССИФИКАЦИИ ПО ТРЕМ ГРУППАМ *

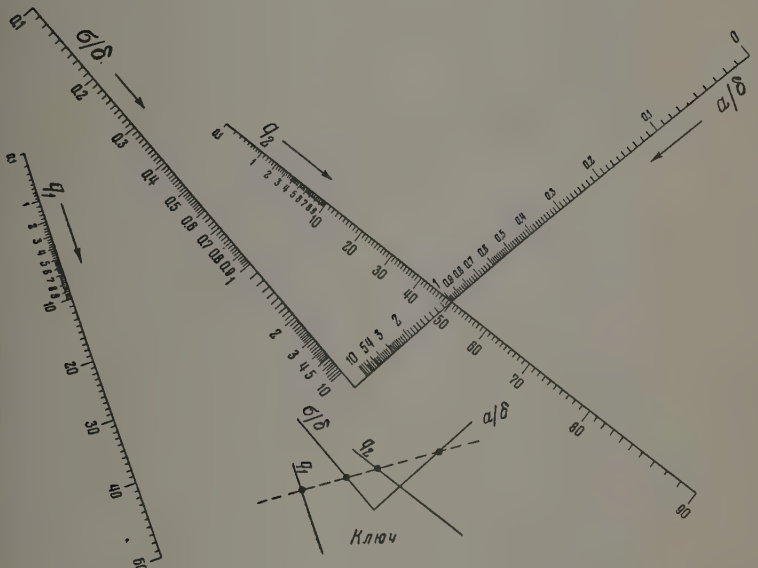
Л. Н. БОЛЬШЕВ

Если случайная величина ξ подчинена нормальному распределению с параметрами m и σ, то вероятности неравенств $\xi < c_1$, $c_1 < \xi < c_2$ и $c_2 < \xi$ равны соответственно

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{c_1} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx, \qquad q_0 = 1-q_1-q_2, \qquad (1)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{c_2}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx.$$

* Статья перепечатана из Инженерного сборника, том XXI, 1955 г.


σ/δ
q₂
a/δ
q₁
Ключ

Положив

$$a = m - \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \qquad \delta = \frac{1}{2}(c_2 - c_1),$$

можно ограничиться рассмотрением зависимости между четырьмя величинами q_1, q_2, a/δ, σ/δ.

Все другие зависимости между величинами m, σ, c_1, c_2, q_1, q_0 и q_2 при помощи элементарных арифметических преобразований приводятся к зависимости между q_1, q_2, a/δ и σ/δ. По смыслу задачи $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 < 1$, $\sigma > 0$. В силу симметрии можно ограничиться случаем $a \geqslant 0$, тогда автоматически $q_1 \leqslant 0{,}5$.

Предлагаемая номограмма покрывает все практически интересные комбинации значений переменных. Шкалы для q_1 и q_2 растянуты в наиболее интересной области малых значений этих вероятностей (до 0,001). Номограмма может найти применение в вопросах определения параметров a и σ по методу группировки [1] и для определения q_1 и q_2 по a, σ и δ, что требуется во многих вопросах математической статистики.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad a' = \frac{a}{\delta}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\delta};$$

тогда уравнения (1) можно записать так:

$$q_1 = \Phi\left(-\frac{1 + a'}{\sigma'}\right), \quad q_2 = 100 - \Phi\left(\frac{1 - a'}{\sigma'}\right), \tag{2}$$

и задача сводится к построению номограммы из выравненных точек для уравнений

$$k_1 = -\frac{1 + a'}{\sigma'}, \quad k_2 = \frac{1 - a'}{\sigma'} \tag{3}$$

с последующей заменой шкал k_1 и k_2 функциональными шкалами

$$q_1 = \Phi(k_1), \quad q_2 = 100 - \Phi(k_2). \tag{4}$$

Эта задача имеет простое решение [2]. Действительно, простой проверкой можно убедиться, что уравнения (3) эквивалентны соответственно уравнениям

$$\begin{vmatrix} \frac{B}{k_1 + (1 - A)} & \frac{Ck_1}{k_1 + (1 - A)} & 1 \\ 0 & \frac{C}{1 + A\sigma'} & 1 \\ \frac{B}{1 + Aa'} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{B}{k_2 + (1 + A)} & \frac{Ck_2}{k_2 + (1 + A)} & 1 \\ 0 & \frac{C}{1 + A\sigma'} & 1 \\ \frac{B}{1 + Aa'} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

где A, B и C — произвольные (отличные от нуля) числа. Из (5) получаем параметрические уравнения шкал

$$x = \frac{B}{k_1 + (1 - A)}, \qquad y = \frac{Ck_1}{k_1 + (1 - A)}$$

$$x = \frac{C}{k_2 + (1 + A)}, \qquad y = \frac{Ck_2}{k_2 + (1 + A)}$$

$$x = \frac{B}{1 + Aa'}, \qquad y = 0$$

$$x = 0, \qquad y = \frac{C}{1 + A\sigma'}$$

причем шкалы k_1 и k_2 следует заменить функциональными шкалами q_1 и q_2 согласно (4).

Если значения a', σ', q_1 и q_2 удовлетворяют (2), а значит, и (5), то соответствующие четыре точки на шкалах лежат на одной прямой, так как уравнения (5) являются уравнениями прямых. Таким образом, если заданы любые две из четырех величин a', σ', q_1 и q_2, то для нахождения оставшихся двух нужно на соответствующих шкалах найти точки, отвечающие заданным значениям, и соединить эти точки прямой. Построенная прямая пересечет две оставшиеся шкалы в точках, соответствующих искомым значениям.

Подбором величин A, B и C можно придать номограмме желаемую форму. Предлагаемая номограмма построена для значений переменных, изменяющихся в пределах

$$0 \leqslant a' \leqslant 10, \quad 0.1 \leqslant \sigma' \leqslant 10, \quad 0.1 \leqslant q_1 \leqslant 50\%, \quad 0.1 \leqslant q_2 \leqslant 90\%,$$

причем требовалось, чтобы вся номограмма умещалась в прямоугольнике с отношением сторон 5 : 6. Указанные требования удовлетворяются, если положить $A = 3$, $B = 400$, $C = 500$. При этих значениях параметров и построена данная номограмма.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Егудин, Оценка параметров нормального распределения методом группировки (таблицы), Изд. Ленинградского дома техники машиностроения, 1950.
[2] Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, Изд. 2-е, М. — Л. ОНТИ, 1936, 252.

A NOMOGRAM CONNECTING THE PARAMETERS OF A NORMAL DISTRIBUTION WITH THE PROBABILITIES FOR CLASSIFICATION INTO THREE GROUPS

L. N. BOLSHEV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let ξ be a normally distributed random variable with mean m and standard deviation σ, and let c_1 and $c_2\,(c_2 > c_1)$ be two real numbers. A nomogram is given for the determination of the probabilities $q_1 = \mathbf{P}\{\xi < c_1\}$, $q_0 = \mathbf{P}\{c_1 < \xi < c_2\}$ and $q_2 = \mathbf{P}\{\xi > c_2\}$.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРВОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ СУММЫ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Я. Г. СИНАЙ

1°. В настоящей заметке дается решение одной задачи, касающейся поведения сумм независимых случайных величин, поставленной в работе Е. Б. Дынкина [1].

Рассмотрим последовательность сумм одинаково распределенных независимых случайных величин с функцией распределения $G(x)$

$$\zeta_1 = \xi_1, \zeta_2 = \xi_1 + \xi_2, \ldots \tag{1}$$

Предположим, что с вероятностью 1 среди ζ_n есть положительные. Отсюда легко следует, что

$$\limsup_{n \to \infty} \zeta_n = \infty.$$

Пусть $T_1 = \tau_1$ есть наименьшее из n, при которых $\zeta_n > 0$; $T_k = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k$ есть наименьшее из n, при которых $\zeta_n > \zeta_{T_{k-1}}$. Тогда ζ_{T_k} есть сумма k одинаково распределенных случайных величин $\zeta_{T_1}, \zeta_{T_2} - \zeta_{T_1}, \ldots, \zeta_{T_k} - \zeta_{T_{k-1}}$. Обозна-

чим функцию распределения величины ζ_{T_1} через $F(x)$. Представляет общий интерес изучение связи между асимптотикой $G(x)$ при $x \to \pm\infty$ и асимптотикой $F(x)$ при $x \to \infty$, в частности, связи между устойчивыми законами, к которым притягиваются $F(x)$ и $G(x)$. Ниже этот вопрос решается для того случая, когда $G(x) = G_{\alpha\beta}(x)$ является устойчивой функцией распределения, для которой

$$f_{\alpha\beta}(\lambda) = \log \mathbf{M} e^{i\lambda\xi_1} = -c\,|\lambda|^{\alpha}\{1 + i\beta \operatorname{sign}\lambda w(\lambda, \alpha)\}, \tag{2}$$

где

$$0 < \alpha < 2, \quad -1 < \beta \leqslant 1, \quad c > 0,$$

$$w(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}\alpha & \text{при } \alpha \neq 1. \\ \dfrac{2}{\pi}\log|\lambda| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

2°. Рассмотрим однородный процесс с независимыми приращениями ζ_t, непрерывный справа и определяемый характеристической функцией (см. (2)).

$$\log \mathbf{M} e^{i\lambda\xi_t} = -ct\,|\lambda|^{\alpha}\{1 + i\beta \operatorname{sign}\lambda w(\lambda, \alpha)\}. \tag{3}$$

Пусть τ_y есть точная верхняя грань тех значений t, для которых $\zeta_t < y$. Тогда $\Gamma_y = \zeta_{\tau_y + 0} - y$ означает величину первого перескока через уровень y.

Теорема 1.

$$\mathbf{P}\{\Gamma_1 > 0\} > 0.$$

Доказательство. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и обозначим через A событие, заключающееся в том, что первый перескок через уровень 1 больше ε и произошел до фиксированного момента t. Очевидно, что $\{\Gamma_1 > 0\} \subseteq A$. Разделим отрезок $[0, t]$ на n частей и рассмотрим последовательность

$$\zeta_{\frac{t}{n}}, \zeta_{\frac{2t}{n}}, \ldots, \zeta_{\frac{kt}{n}}, \ldots$$

Пусть ν_n — наименьшее значение k, для которого $\zeta_{\frac{k}{n}t} > 1$. Положим $\Gamma_1^{(n)} = \zeta_{\frac{\nu_n}{n}t} - 1$, $B_i^{(n)} = \{\zeta_{\frac{k}{n}t} < 1$ для всех $k < i$, $\zeta_{\frac{i}{n}t} > 1 + \varepsilon\}$ и $A^{(n)} = \{(\nu_n < n) \cap (\Gamma_1^{(n)} > \varepsilon)\}$. Тогда $B_i^{(n)}$ суть непересекающиеся события при различных i и

$$A^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{n} B_i^{(n)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{A^{(n)}\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{B_i^{(n)}\}. \tag{4}$$

Выберем произвольное отрицательное M. Используя то, что ζ_t есть процесс с независимыми приращениями, получаем следующие неравенства:

$$\mathbf{P}\{B_1^{(n)}\} \geqslant \mathbf{P}\{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1 \text{ для всех } k < i,\ \zeta_{\frac{i}{n}t} - \zeta_{\frac{i-1}{n}t} > 1 + \varepsilon - M\} =$$
$$= \mathbf{P}\{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1 \text{ для всех } k < i\}\, P\{\zeta_{\frac{i}{n}t} - \zeta_{\frac{i-1}{n}t} > 1 + \varepsilon - M\}. \tag{5}$$

Далее

$$\{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1 \text{ для всех } k < i\} \supseteq \ldots \supseteq \{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1 \text{ для всех } k \leqslant n\}. \tag{6}$$

С помощью (5), (6) выводим из (4), что

$$\mathbf{P}\{A^{(n)}\} \geqslant n\mathbf{P}\{\zeta_{\frac{i}{n}t} - \zeta_{\frac{i-1}{n}t} > 1 + \varepsilon - M\} \cdot P\{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1 \text{ для всех } k \leqslant n\}. \tag{7}$$

Из выражения для характеристической функции (3) следует, что распределение для величины $(\zeta_{\frac{i}{n}} - \zeta_{\frac{i-1}{n}}) n^{\frac{1}{\alpha}}$ не зависит от n и i и определяется формулой (2). Поскольку

$$1 - G_{\alpha\beta}(x) + G_{\alpha\beta}(-x) \sim Gx^{-\alpha},$$

то при больших n

$$\mathbf{P}\{\zeta_{\frac{i}{n}t} - \zeta_{\frac{i-1}{n}t} > 1 + \varepsilon - M\} \sim \frac{c_1}{n}. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), заключаем, что при больших n

$$\mathbf{P}\{A^{(n)}\} > c_2 \mathbf{P}\{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1 \text{ для всех } k \leqslant n\}. \tag{9}$$

Из того, что почти все траектории нашего процесса имеют лишь разрывы первого рода и из непрерывности справа вытекает, что $\Gamma_1^{(n)}$ сходится по вероятности к Γ_1), вероятность события $A^{(n)}$ стремится к вероятности события A и вероятность события $\{M < \zeta_{\frac{k}{n}t} < 1$ для всех $k \leqslant n\}$ стремится к вероятности события $\{M < \zeta_\tau < 1$ для $r < t\}$.

Тем самым теорема доказана*.

Следствие. *Существует предельное распределение для последовательности* ζ_{T_k}.

Это непосредственно следует из доказанной Е. Б. Дынкиным [1] альтернативы: 1) либо $\Gamma_1 = 0$ с вероятностью 1; 2) либо существует предельное распределение для величины ζ_{T_k}. Из теоремы 1 следует, что имеет место второе.

3°. В этом параграфе изучается поведение случайных величин T_k. Пусть N_n есть число положительных членов среди первых n членов в (1). Из (2) следует, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_n > 0\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} > 0\right\} = \mathbf{P}\{\zeta_1 > 0\} = 1 - G_{\alpha\beta}(0) = q$$

и не зависит от n. Тогда, как показал Андерсен [5],

$$\mathbf{P}\{N_n = m\} = (-1)^n \binom{q-1}{n-m} \binom{-q}{m}.$$

Отсюда

$$f_n = \mathbf{P}\{\tau_1 > n\} = \mathbf{P}\{N_n = 0\} = (-1)^n \binom{r-1}{n}.$$

Легко выписывается производящая функция для последовательности $\{f_n\}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = (1-z)^{q-1}. \tag{10}$$

Пусть $p_n = \mathbf{P}\{\tau_1 = n\}$. Тогда $p_n = f_{n-1} - f_n$ и из (10) следует, что

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = 1 - (1-z)^q. \tag{11}$$

Переходя к характеристическим функциям, получим

$$\varphi(s) = \mathbf{M} \cdot \exp(is\tau_1) = 1 - (1 - e^{is})^q = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^q \binom{q}{k} \exp(iks). \tag{12}$$

---

* Доказательство не проходит при $\alpha > 1$ и $\beta = -1$, так как в этом случае траектория нашего процесса не имеет с вероятностью 1 положительных скачков. При $\alpha < 1$ и $\beta = -1$ вся постановка вопроса не имеет смысла.

Заметим, что $\lim\limits_{s \to +0} \arg \varphi(s) = +0$. В самом деле, ряд для $(1 - e^{is})^q$, стоящий в (12), при $s = \frac{\pi}{2}$ может быть записан в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{q}{2k} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{q}{2k+1} = (1-i)^q.$$

Легко видеть, что коэффициенты при действительной и мнимой частях положительны, причем коэффициент при мнимой части меньше 1. Отсюда следует, что при $0 < s < \pi$ этот ряд определяет ту ветвь функции $(1 - e^{is})^q$, для которой $-2\pi q < \arg (1 - e^{is})^q < 0$. Из соотношения $\varphi(s) = \overline{\varphi(-s)}$ и доказанного соотношения $\lim\limits_{s \to +0} \arg \varphi(s) = +0$ следует, что $0 < \arg (1 - e^{is})^q < 2\pi q$ при $-\pi < s < 0$.

Далее, $T_k = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k$, где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ — независимы и одинаково распределены. Следовательно, характеристическая функция для T_k имеет вид

$$\varphi^k(s) = \mathbf{M} \exp(iT_k s) = [1 - (1 - e^{is})^q]^k. \tag{13}$$

Нетрудно показать, что распределение для величины τ_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметрами $\alpha = q$ и $\beta = -1$. Для дальнейшего нам понадобится оценка быстроты сходимости распределения величины $\frac{T_k}{k^{\frac{1}{q}}}$ к предельному распределению. Обозначим через $g(x)$ плотность устойчивого закона с характеристической функцией

$$\psi(\lambda) = f_{q,-1}(\lambda) = \exp\left(-\cos\frac{\pi}{2} q |\lambda|^q \{1 - i \operatorname{sign} \lambda\, w(\lambda, q)\}\right).$$

Теорема 2. *При больших k равномерно по n*

$$|k^{\frac{1}{q}} \mathbf{P}\{T_k = n\} - g(z)| < \frac{c}{k}, \tag{14}$$

где $z = nk^{-\frac{1}{q}}$.

Доказательство. Применяя формулу обращения характеристических функций, получим

$$\mathbf{P}\{T_k = n\} = \frac{1}{2\pi k^{\frac{1}{q}}} \int_{-\pi k^{\frac{1}{q}}}^{\pi k^{\frac{1}{q}}} e^{-izt} [1 - (1 - e^{itk^{-\frac{1}{q}}})^q]^k dt$$

и

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} \psi(t)\, dt.$$

Отсюда

$$2\pi |k^{\frac{1}{q}} \mathbf{P}\{T_k = n\} - g(z)| =$$

$$= \left| \int_{-\pi k^{\frac{1}{q}}}^{\pi k^{\frac{1}{q}}} \exp^{-izt} [1 - (1 - e^{itk^{-\frac{1}{q}}})^q]^k dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} \psi(t)\, dt \right|.$$

Разобьем правую часть на четыре интеграла:

$$I_1 = \left| \int\limits_{|t|>\log^{\frac{2}{q}} k} e^{-izt}\psi(t)\,dt \right|,$$

$$I_2 = \left| \int\limits_{\varepsilon k^{\frac{1}{q}} \leqslant |t| \leqslant \pi k^{\frac{1}{q}}} e^{-izt}[1-(1-e^{itk^{-\frac{1}{q}}})^q]^k\,dt \right|,$$

где $\varepsilon > 0$ будет определено позднее;

$$I_3 = \left| \int\limits_{\log^{\frac{2}{q}} k \leqslant |t| \leqslant \varepsilon k^{\frac{1}{q}}} e^{-izt}[1-(1-e^{itk^{-\frac{1}{q}}})^q]^k\,dt \right|,$$

$$I_4 = \left| \int\limits_{|t|<\log^{\frac{2}{q}} k} e^{-izt}\{[1-e^{itk^{-\frac{1}{q}}})^q]^k - \psi(t)\}\,dt \right|.$$

Оценим I_1. Применяя правило Лопиталя, легко получить, что

$$I_1 \leqslant \int\limits_{|t|>\log^{\frac{2}{q}} k} e^{-\cos\frac{\pi}{2}q|t|^q}\,dt = o(k^{-s}), \tag{15}$$

где s — любое, сколь угодно большое положительное число.

Для оценки второго интеграла заметим, что, поскольку величина τ_1 имеет решетчатое распределение с шагом 1, то модуль ее характеристической функции в отрезке $\varepsilon \leqslant t \leqslant \pi$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ меньше e^{-c_0}, где c_0 — некоторое положительное число, зависящее от ε. Доказательство этого факта можно найти, например, в книге Гнеденко [6] (стр. 252). Поэтому для I_2 справедливо такое неравенство:

$$I_2 < 2\pi k^{\frac{1}{q}} e^{-kc_0}. \tag{16}$$

Переходя к I_3, выберем $\varepsilon > 0$ следующим образом. Легко видеть, что модуль характеристической функции $\varphi(s)$ в некоторой окрестности точки $s = 0$ монотонно стремится к 1. В качестве ε мы и возьмем некоторую точку из этой окрестности.

Тогда для оценки I_3 достаточно подсчитать модуль $\varphi^k(s)$ при $s = \dfrac{\log^{\frac{2}{q}} k}{k^{\frac{1}{q}}}$:

$$\left|\varphi^k(s)\right|_{s=\frac{\log^{\frac{2}{q}} k}{k^{\frac{1}{q}}}} \leqslant \left(1-\frac{\log^2 k}{2k}\right)^k \leqslant e^{-\log^2 k}.$$

Отсюда получим, что

$$I_3 \leqslant 2\varepsilon k^{\frac{1}{q}} e^{-\log^2 k}. \tag{17}$$

Обратимся к I_4. Напишем его в таком виде:

$$I_4 = k^{\frac{1}{q}} \left| \int\limits_{|u|<\frac{\log^{\frac{2}{q}} k}{k^{\frac{1}{q}}}} e^{-izk^{\frac{1}{q}}u}\left\{[1-(1-e^{iu})^q]^k - e^{-\cos\frac{\pi}{2}q|u|^q k\left(1-i\,\mathrm{sign}\,u\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}q\right)}\right\}du \right|.$$

Разлагая функцию $1-(1-e^{iu})^q$ в ряд в окрестности $u=0$, находим, что

$$1-(1-e^{iu})^q=\psi(u)-(-iu)^{2q}c(u),$$

причем $|c(u)|<A$ ($A=\text{const}$) в некоторой окрестности нуля.

Отсюда после несложных преобразований получаем, что

$$I_4\leqslant k^{\frac{1}{q}}\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}A^l\int\limits_{|u|<\frac{\log^{\frac{2}{q}}k}{k^{\frac{1}{q}}}}e^{-(k-l)\cos\frac{\pi}{2}q|u|^q}|u|^{2lq}\,du. \tag{18}$$

Произведем сначала оценку для

$$I_4^{(1)}=k^{\frac{1}{q}}\sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}\binom{k}{l}A^l\int\limits_{|u|<\frac{\log^{\frac{2}{q}}k}{k^{\frac{1}{q}}}}e^{-(k-l)\cos\frac{\pi}{2}q|u|^q}|u|^{2lq}\,du.$$

Используя то, что $\dfrac{k^{\frac{1}{q}}}{(k-l)^{\frac{1}{q}}}<2^{\frac{1}{q}}$ при $l\leqslant\dfrac{k}{2}$, $\binom{k}{l}<k^l$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\cos\frac{\pi}{2}q|v|^q}|v|^{2kq}dv<c$,

выводим для $I_4^{(1)}$, что

$$I_4^{(1)}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}c_1\sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}\frac{(4A)^l}{k^l}<\frac{M}{k}. \tag{19}$$

Аналогично, для

$$I_4^{(2)}=k^{\frac{1}{q}}\sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+2}^{k}\binom{k}{l}A^l\int\limits_{|u|<\frac{\log^{\frac{2}{q}}k}{k^{\frac{1}{q}}}}e^{-(k-l)|u|^q\cos\frac{\pi}{2}q}|u|^{2lq}\,du$$

можно написать:

$$I_4^{(2)}\leqslant k^{\frac{1}{q}}\sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+2}^{k}\binom{k}{l}A^l\int\limits_{|u|<\frac{\log^{\frac{2}{q}}k}{k^{\frac{1}{q}}}}|u|^{2lq}\,du\leqslant 2k^{\frac{1}{q}}\frac{\log^{4k+\frac{1}{2}}k}{(kq+1)\,k^{\frac{k}{2}}}. \tag{20}$$

Последнее выражение по признаку Коши есть общий член сходящегося ряда. Складывая (15), (16), (17), (19), (20), получим требуемую оценку.

4°. Ниже вычисляется показатель предельного устойчивого распределения для последовательности ζ_{T_k}. Нам понадобятся понятия верхней и нижней функции для последовательности сумм независимых случайных величин.

Определение 1. *Не зависящая от случая монотонная функция $f^*(t)$ называется верхней функцией, если неравенство*

$$\zeta_n>f^*(n) \tag{21}$$

выполняется с вероятностью 1 лишь при конечном числе значений n.

Определение 2. *Не зависящая от случая монотонная функция $f_*(t)$ называется нижней функцией, если неравенство*

$$\zeta_n > f_*(n) \tag{22}$$

выполняется с вероятностью 1 при бесконечном числе значений n.

Примечание. Приведенные определения отличаются от общепринятых тем что обычно вместо ζ_n берут $|\zeta_n|$.

Методами, развитыми А. Я. Хинчиным в работе [2], можно показать, что для последовательности сумм независимых случайных величин, функция распределения которых притягивается к устойчивому закону с характеристической функцией (2), любая функция вида $t^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}}$ при $0<\varepsilon<\alpha$ является верхней, а функция $t^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$ при $\varepsilon>0$ является нижней функцией.

Лемма 1. *Если $f^*(t)$ есть верхняя функция для последовательности $\{\zeta_n\}$, $g^*(t)$ есть верхняя функция для последовательности $\{T_k\}$, то $f^*(g^*(t))$ есть верхняя функция для последовательности $\{\zeta_{T_k}\}$.*

Доказательство. Будем, как обычно, через $\Omega=\{\omega\}$ обозначать пространство элементарных событий с выделенной на нем борелевской системой множеств на которых задана вероятность. Пусть Ω_1 есть множество тех ω, для которых выполняется неравенство (21) для последовательности $\{\zeta_n\}$ с функцией $f^*(t)$, Ω_2 — множество тех ω, для которых выполняется неравенство (21) для последовательности $\{T_k\}$ с функцией $g^*(t)$. Тогда для каждого $\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2$ при достаточно большом $k(\omega)$ в силу монотонности $f^*(t)$

$$\zeta_{T_k} < f^*(T_k) < f^*(g^*(k)).$$

Так как $\mathbf{P}\{\Omega_1\cap\Omega_2\}=1$, то лемма доказана.

Для последовательности $\{T_k\}$ введем следующее

Определение 3. *Не зависящая от случая монотонная функция $g_{**}(t)$ называется равномерно нижней, если неравенство*

$$T_k < g_{**}(k) \tag{23}$$

выполняется с вероятностью 1 лишь при конечном числе значений k.

Лемма 2. *При любом $\varepsilon>0$ функция $\chi(t)=t^{\frac{1}{q+\varepsilon}}$ является равномерно нижней для последовательности $\{T_k\}$.*

Доказательство. Согласно лемме Бореля — Кантелли достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{T_k < k^{\frac{1}{q+\varepsilon}}\right\}.$$

По теореме 2

$$\mathbf{P}\{T_k=n\} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{1}{q}}}\,g\left(\frac{n}{k^{\frac{1}{q}}}\right)+\frac{c}{k^{1+\frac{1}{q}}}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{T<k^{\frac{1}{q+\varepsilon}}\right\} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q+\varepsilon}}}\,g\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q+\varepsilon}}}\right)+\frac{1}{k^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{q+\varepsilon}}}. \tag{24}$$

Известно, что $g(z)$ монотонна в окрестности начала координат.

Как показал Ю. В. Линник [3], в окрестности начала координат для функции $g(z)$ имеет место представление

$$g(z)=\exp\left(-\frac{\alpha}{z^{\frac{q}{1-q}}}\right)f(z), \tag{25}$$

где $f(z)\sim cz^{-m}$, а m — некоторое положительное число, зависящее от q. Подставляя (25) в (24), получим, что правая часть (24) есть общий член сходящегося ряда.

Лемма 3. *Пусть* $f_*(t)$ *есть нижняя функция для последовательности* $\{\zeta_n\}$, $g_{**}(t)$ *есть равномерно нижняя функция для последовательности* $\{T_k\}$. *Тогда* $(g_{**}(t))$ *есть нижняя функция для последовательности* ζ_{T_k}.

Доказательство. Через Ω_1 обозначим множество тех ω, для которых выполняется неравенство (22), а через Ω_2 — множество тех ω, для которых выполняется неравенство (23).

Заметим следующее: если $\zeta_{T_k} < f_*(T_k)$, то, в силу монотонности $f_*(t)$, имеем $\zeta_n < f_*(n)$ при $T_k < n < T_{k+1}$. Отсюда следует, что для $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ найдется бесконечная последовательность $k_i(\omega)$, для которой

$$\zeta_{T_{k_i}} > f_*(T_{k_i}).$$

Так как $g_{**}(t)$ — равномерно нижняя функция для последовательности T_k, то при достаточно большом $i(\omega)$

$$\zeta_{T_{k_i}} f_*(T_{k_i}) > f_*(g_{**}(k_i)).$$

Поскольку $\mathbf{P}\{\Omega_1 \cap \Omega_2\} = 1$, то лемма доказана.

Теорема 3. *Функция распределения случайной величины* ζ_{T_1} *принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметрами* $\alpha' = \alpha q$ *и* $\beta = -1$.

Доказательство. Согласно лемме 1, функция $t^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{q-\varepsilon_2}} = t^{\frac{1}{\alpha q-\varepsilon_3}}$ есть верхняя функция для последовательности ζ_{T_k}. Отсюда следует, что

$$\alpha' \geqslant \alpha q. \tag{26}$$

Согласно лемме 3, функция $t^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1'}\cdot\frac{1}{q+\varepsilon_2'}} = t^{\frac{1}{\alpha q+\varepsilon_3'}}$ является нижней функцией для последовательности ζ_{T_k}. Следовательно,

$$\alpha' \leqslant \alpha q. \tag{27}$$

Сравнивая неравенства (26) и (27), видим, что $\alpha' = \alpha q$. Равенство $\beta = -1$ следует из того, что случайная величина ζ_{T_1} с вероятностью 1 неотрицательна. Тем самым теорема доказана.

Как указывалось выше, можно выразить α' через α и β явным образом. Для этого воспользуемся тем, что, как показал Чжао Чжун-чжэ [4], $q = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(-\beta \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\pi\alpha}$ при $\alpha \neq 1$. Тогда из теоремы 3 получим:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(-\beta \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\pi}. \tag{28}$$

Легко видеть, что при наших предположениях всегда $\alpha' < 1$.

5°. Используя вычисленные значения α' и опираясь на результаты, полученные Ю. Б. Дынкиным [1], можно получить некоторые следствия относительно поведения сумм независимых случайных величин.

Для последовательности (1) с функцией распределения (2) обозначим через ν_x номер первой суммы, большей x. Тогда $\nu_x = T_{k(x)}$. Будем изучать следующие случайные величины: $\gamma_x' = \zeta_{\nu_x} - x$, $\gamma_x'' = x - \zeta_{T_{k(x)-1}}$, $\gamma_x = \gamma_x' + \gamma_x''$. Справедливы соотношения:

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\gamma_x'}{x} < u\right\} = \frac{\sin\pi\alpha'}{\pi}\int_0^u \frac{dv}{v^{\alpha'}(1+v)}, \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\gamma_x''}{x} < u\right\} = \frac{\sin\pi\alpha'}{\pi}\int_0^u (1-v)^{\alpha'-1} v^{-\alpha'}\, dv, \tag{30}$$

$$(u < 1)$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\gamma}{x} < u\right\} = \frac{\sin \pi\alpha'}{\pi} \int_0^u v^{-1-\alpha'} g(v)\, dv, \text{ где} \tag{31}$$

$$g(v) = \begin{cases} 0 & \text{при } v \leqslant 0 \\ 1-(1-v)^{\alpha'} & \text{при } 0 < v < 1 \\ 1 & \text{при } v \geqslant 1 \end{cases},$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\gamma'_x}{x} < u,\ \frac{\gamma''_x}{x} < v\right\} = \int_0^u \int_0^v \alpha' \frac{\sin \pi\alpha'}{\pi} (1-x)^{\alpha'-1} (x+y)^{-1-\alpha'} dx\, dy, \tag{32}$$

$$0 < v < 1, \quad u < 0.$$

Рассмотрим теперь однородный процесс с независимыми превращениями, определяемый формулой (3). Пусть τ_y есть точная верхняя грань тех значений t, для которых $\zeta_t < y$.

Положим

$$\Gamma'_y = \zeta_{\tau_y+0} - y,$$
$$\Gamma''_y = y - \zeta_{\tau_y-0},$$
$$\Gamma_y = \zeta_{\tau_y+0} - \zeta_{\tau_y-0}.$$

Из формул (29)–(32), как и в [1], можно получить, что плотности распределения для величин Γ'_y, Γ''_y, Γ_y и совместная плотность распределения Γ'_y, Γ''_y равны

$$p_{\Gamma'_y}(u) = \frac{\sin \pi\alpha'}{\pi} \frac{y^{\alpha'}}{(u+y)\, u^{\alpha'}}, \tag{29a}$$

$$p_{\Gamma''_y}(u) = \frac{\sin \pi\alpha'}{\pi} (y-u)^{\alpha'-1} u^{-\alpha'} \ (u > y), \tag{30a}$$

$$p_{\Gamma_y}(u) = \frac{\sin \pi\alpha'}{\pi}\ u^{-1-\alpha'}\, g_y(u), \text{ где} \tag{31a}$$

$$g_y(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leqslant 0 \\ y^{\alpha'} - (y-u)^{\alpha'} & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant y \\ y^{\alpha'} & \text{при } u \geqslant y, \end{cases}$$

$$p_{\Gamma'_y,\, \Gamma''_y}(u, v) = \begin{cases} \alpha' \dfrac{\sin \pi\alpha'}{\pi} (y-v)^{\alpha'-1} (u+v)^{-\alpha'-1} & \text{при } 0 < u,\ 0 < v < y \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{32a}$$

Замечание. Аналогично можно изучать распределение величины первой отрицательной суммы. Тогда мы получим, что распределение для нее принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметрами $\alpha'' = \alpha \cdot G_{\alpha\beta}(0)$, $\beta = 1$.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность Е. Б. Дынкину за постановку и руководство при решении изложенных задач.

Поступила в редакцию
21. 5. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955).
[2] А. Я. Хинчин, Математ. сборник, **3** (45): 3, 577.
[3] Ю. В. Линник, ДАН СССР, **94**, 4 (1954).
[4] Чжао Чжун-чжэ, Acta Math. Chine, **3**, № 3 (1953).
[5] Anderšen, Mathem. Scandinavica, **2**, 2 (1954).
[6] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М., 1954.

ON THE DISTRIBUTION OF THE FIRST POSITIVE SUM FOR THE SEQUENCE OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

SINAY Ya. G. (MOSCOW)

(*Summary*)

The following problem is considered in this paper. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be mutually independent identically distributed random variables whose characteristic function is

$$\varphi(t) = \mathbf{M}e^{i\xi t} = e^{-c|t|^\alpha}\left(1 + i\beta \frac{t}{|t|}\omega(t, \alpha)\right),$$

where $c > 0$, $0 < \alpha < 2$, $-1 < \beta < 1$ and

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, & \alpha \neq 1 \\ \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Let $S_n = x_1 + \cdots + x_n$, and ν be the first index for which $S_n > 0$.

It is proved that the distribution function of random variables S_ν belongs to the domain of attraction of the stable law with the parameters

$$\alpha' = \alpha(1 - F(0)), \quad \beta = -1$$

where $F(0) = \mathbf{P}\{x_i < 0\}$.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(сентябрь—декабрь 1956 г.)

A SUMMARY OF PAPERS PRESENTED AT THE SESSIONS OF THE SCIENTIFIC RESEARCH SEMINAR ON THE THEORY OF PROBABILITIES

Заседание 11 сентября.

Севастьянов Б. А., **Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора** (Sevastjanov B. A., Erlang's formulas in telephony with an arbitrary distribution law for the duration of the conversation).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том II, вып. 1.

Заседание 18 сентября.

Добрушин Р. Л., **Пример счетного однородного марковского процесса, все состояния которого являются мгновенными** (Dobrushin R. L., An example of a calculable homogeneous Markov process all states of which are instantaneous).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», т. I, вып. 4.

Пинскер М. С., Нормальное распределение и решение некоторых экстремальных задач теории информации (Pinsker M. S., Normal distribution and a solution to several extremal problems in information theory).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Доклады АН СССР», 1956, т. 111, № 4.

Заседание 25 сентября.

Ососкоў Г. А., Предельные теоремы для потоков однородных событий (Ossoskow G. A., Ein Grenztheorem für Folgen gleichartiger Ereignisse).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том I, вып. 2.

Заседание 9 и 16 октября

Колмогоров А. Н., Равномерная предельная теорема для сумм независимых бесконечно малых слагаемых (Kolmogorow A. N., Deux théorèmes asymptotiques uniformes pour des variablés aléatoires indépendantes).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том I, вып. 4.

Заседание 23 октября

Севастьянов Б. А., Переходные явления в ветвящихся случайных процессах (Sevastjanov B. A., Transient phenomena in branching stochastic processes).

Ветвящийся случайный процесс (см. [1]) есть марковский процесс со счетным числом состояний, который описывает некоторую схему размножения каких-либо частиц. Обозначим через μ_t число частиц ко времени t, если процесс начался с одной частицы. Обозначим вероятность $\mathbf{P}\{\mu_t = n\} = p_n(t)$ и производящую функцию $F(t; x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, x^n$. Формально говоря, марковский процесс μ_t будет ветвящимся, если при $t \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$

$$\mu_{t+s} = \mu_{t1} + \mu_{t2} + \ldots + \lambda_{t\mu_s},$$

где μ_{ti}, $i = 1, 2\ldots$ независимые одинаково распределенные случайные величины с законом распределения случайной величины μ_t; μ_{ti} не зависят в свою очередь от μ_s. Основное уравнение марковских процессов очень просто записывается с помощью производящих функций

$$F(t + s;\ x) = (t;\ F(s;\ x)). \tag{1}$$

Здесь будет рассматриваться случай, когда существует $\frac{dF}{dt}$. Обозначим

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad a = f'(1), \quad b = f''(1), \quad c = f'''(1).$$

Из (1) получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{dt} = f(F). \tag{2}$$

Для вероятности $Q(t)$ выживания потомства одной частицы ко времени t имеют место следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$ (см. [2],]4])

$$Q(t) \approx \begin{cases} Ke^{at} & \text{при } a < 0 \\ \dfrac{2}{bt} & \text{при } a = 0 \\ 1 - \lambda & \text{при } a > 0, \end{cases}$$

где K — некоторая положительная константа, а λ — отличный от единицы неотрицательный корень уравнения $f(x) = 0$.

Для условного математического ожидания $M^*(t) = \mathbf{M}\{\mu_t \mid \mu_t > 0\}$ имеют место следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$

$$M^*(t) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{K} & \text{при } a < 0 \\ \dfrac{bt}{2} & \text{при } a = 0 \\ \dfrac{e^{at}}{1-\lambda} & \text{при } a > 0. \end{cases}$$

Условный закон распределения

$$S_t(y) = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t}{M^*(t)} < y \mid \mu_t > 0\right\}$$

при $t \to \infty$ сходится к предельному распределению (см. [3], [4]).

$$\lim_{t\to\infty} S_t(y) = S(y).$$

При $a < 0$ и $a > 0$ вид предельного закона $S(y)$ существенно зависит от всей производящей функции $f(x)$, причем в первом случае распределение $S(y)$ — дискретно, а во втором — непрерывно. При $a = 0$

$$S(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y}, & y \geqslant 0. \end{cases}$$

Тема доклада — изучение закона распределения $S_t(y)$ при $t \to \infty$ в случае, когда «a» близко к нулю. Явления, возникающие в ветвящихся процессах при $a \to 0$, будем называть переходными.

Пусть ветвящийся процесс зависит от параметра «a» так, что в окрестности $a = 0$:

1) $p_n = p_n(a)$ непрерывно зависят от «a»;
2) третий факториальный момент «c» ограничен;
3) второй факториальный момент $b > 0$.

В этих условиях имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *При* $t \to \infty$ *и* $a \to 0$

$$Q(t) \approx q(t; a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\dfrac{b}{2a}(1 - e^{-at})} & \text{при } a < 0 \\ \dfrac{2}{bt} & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *При* $t \to \infty$ *и* $a \to 0$

$$S_t(y) \to S(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Доказательство этих теорем основано на изучении дифференциального уравнения (2) с помощью разложения правой части по формуле Тейлора.

Обозначим число частиц ко времени t через ν_t, если процесс начался с «n» частиц. ν_t можно представить в виде суммы независимых случайных величин μ_{ti}, определенных выше,

$$\nu_t = \mu_{t1} + \ldots + \mu_{tn}.$$

Пусть ρ_t — число положительных слагаемых в (3). Ясно, что

$$\mathbf{M}\rho_t = nQ(t) \approx nq(t, a) = \gamma = \begin{cases} \dfrac{2an}{b(1 - e^{-at})} & \text{при } a < 0 \\ \dfrac{2an}{bt} & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$\overline{\mathbf{M}}(t) = \mathbf{M}\{\nu_t \mid \nu_t > 0\}$$

$$\zeta_t = \frac{\nu_t}{\overline{M}^*(t)}$$

$$H_t(z) = \mathbf{P}\{\zeta_t < z \mid \zeta_t > 0\}.$$

Теорема 3. *Если* $n \to \infty$, $a \to 0$ *и* $t \to \infty$, *то равномерно по* z *и по* γ, *изменяющемся в конечных пределах* $0 \leqslant \gamma \leqslant c$, *где* c — *произвольная константа,*

$$|H(z) - h(z, \gamma)| \to 0,$$

где

$$h(z, \gamma) = \frac{e^{-\gamma}\gamma}{(1-l^{-\gamma})^{s/2}} \int_0^z e^{-\frac{y\gamma}{1-l^{-\gamma}}} y^{-1/2} I_1\left(2\gamma \sqrt{\frac{y}{1-l^{-\gamma}}}\right) dy, \quad z > 0$$

и

$$I_1(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!4!}\left(\frac{y}{2}\right)^5 + \ldots$$

функция Бесселя.

Доказательство этой теоремы использует теоремы 1 и 2, а также обобщенную теорему Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Н. А. Дмитриев, ДАН, СССР, 56, № 1 (1947).
[2] А. Н. Колмогоров, Изв. НИИ матем. и мех. Томск. ун-та, 2 (1938), 7—12.
[3] А. М. Яглом, ДАН СССР, 56, № 8 (1947).
[4] Б. А. Севастьянов, Успехи матем. наук, VI, № 6 (1951).

Скороход А. В., Предельные теоремы для случайных процессов (Skorohod A. V., Limit theorems for stochastic processes).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том. I, вып. 3.

Заседание 30 октября.

Нагаев С. В., О некоторых предельных теоремах для однородных цепей Маркова (Nagaev S. V., On several limit theorems for homogeneous Markov chains).

Пусть дано абстрактное пространство X и борелевское тело F_X множеств, принадлежащих X. Пусть $P(\eta, A)$, $\eta \in X$, $A \in F_X$ — функция вероятностей перехода. Допустим, что существует стационарное распределение вероятностей $P(A)$ такое, что

$$|P^{(n)}(\xi, A) - P(A)| < \gamma\rho^n, \quad \rho < 1, \tag{1}$$

равномерно относительно $\xi \in X$ и $A \in F_X$. Функция $P(\eta, A)$ вместе с начальным распределением вероятностей определяет последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайных величин, связанных в цепь Маркова.

Пусть $f(\eta)$—действительная функция, заданная на X и измеримая относительно F_X.

Теорема 1. *Если*

$$\int_X f^2(\eta) P(d\eta) < \infty$$

и

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} (f(x_m) - \mathrm{E}\, f(x_m))\right]^2 > 0$$

(математическое ожидание вычисляется в предположении, что начальное распределение является стационарным), то при любом начальном распределении $\pi(A)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_\pi\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} (f(x_m) - \mathrm{E}\, f(x_m)) \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть распределение* $F(x) = \mathrm{P}(f(\eta) < x)$ *принадлежит области притяжения устойчивого закона* $V_\alpha(x)$ *с показателем* α *и для некоторого* ν, $0 < \nu \leqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} B_n^{-\nu} \sup_{\xi} \int_{|f(\eta)| < B_n\psi(n)} |f(\eta)|^\nu P(\xi, d\eta) = 0,$$

где $\psi(n)$ *монотонно возрастает и* $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n)=\infty$, *то при некотором выборе постоянных* A_n *и* B_n *и любом начальном распределении* π

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_\pi\left(\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}f(x_m)-A_n}{B_n}<x\right)=V_\alpha(x). \tag{3}$$

Пусть теперь Ω — счетное множество возможных состояний $\{\omega_i\}$, p_{ik} — вероятность перейти из состояния ω_i в состояние ω_k за один шаг. Предположим, что множество состояний образует один существенный класс, состоящий из одного подкласса и

$$B=\inf_{(i,\,j)}\sum_{k=1}^{\infty}\min(p_{ik},\,p_{jk})>0.$$

Пусть, далее, $f(\omega_j)=a+k_jh$ — общий наибольший делитель разностей $\dfrac{f(\omega_j)-f(\omega_i)}{n}$ $i,\ j=\overline{1,\infty}$), равен 1, $\sum\limits_j f^2(\omega_j)\,p_j<\infty$ и $\sigma>0$ (σ определяется так же, как в теореме 1). Тогда справедлива

Теорема 3. *Равномерно по* n

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n^{(\gamma)}(s)-\frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{z_{ns}^2}{2}}\right)=0, \tag{4}$$

где $p_n^{(\gamma)}(s)$ *— вероятность того, что*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x_k)-\mathbf{E}\,f(x_k)]}{\sigma\sqrt{n}}=an+sh$$

при условии, что $x_1=\omega_\gamma$ *и* $z_{ns}=\dfrac{an+sh}{\sigma\sqrt{n}}$.

При дополнительном предположении

$$\sum_j|f(\omega_j)|^k\,p_{ij}<M,\quad k\geqslant 4 \tag{5}$$

равномерно относительно i, имеет место

Теорема 4.

$$p_n^{(\gamma)}(t)=\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\left\{\varphi(z_{ns})+\sum_{j=1}^{k-3}\frac{1}{n^{j/2}}\,p_j^{(\gamma)}(-\varphi(z_{ns}))\right\}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right),$$

где $p_j^{(\gamma)}(-\varphi)$ *вычисляется как* $p_j^{(\gamma)}(-u)$ *с заменой* u^r *на* $\dfrac{d^r}{dx^r}\varphi(x)$, *а* $p_j^{(\gamma)}(\quad u)$ — *некоторый полином.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. L. Doob, Stochastic Prozesses, New York, 1953.
[2] Ф. Рис и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Изд. ин. лит., 1954.
[3] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, Изд. Ин. лит., 1951.
[4] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.

[5] Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, Украинский матем.журн., **VI**, № 1 (1954).
[6] С. Х. Сираждинов, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, ДАН СССР, **84**, № 6 (1952), 1143—1146.
[7] Р. Л. Добрушин, Об условиях центральной предельной теоремы для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, **108**, № 6 (1956).

Заседание 13 ноября.

Севастьянов Б. А., Финальные вероятности ветвящихся случайных процессов (Sevastjanov B. A., Final probabilities for branching stochastic processes).

Изучается процесс размножения частиц типов $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_s$. Обозначим через $P_k^{\alpha}(t)$ — вероятность того, что за время t одна частица типа T_k переходит в α_i частиц тела T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, s$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Введем производящие функции

$$F_k(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s, t) = \sum_{\alpha} P_k^{\alpha}(t)\, x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_s^{\alpha_s}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, s,$$

причем

$$F_k(x_0, x_1, \ldots, x_s, \Delta t) = x_k + f_k(x_0, x_1, \ldots, x_s)\,\Delta t + o(\Delta t),$$

где $f_k(x_0, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\alpha} P_k^{\alpha} x_0^{\alpha_0} \ldots x_s^{\alpha_s}$.

Пусть частицы типа T_0 финальны, т. е. с вероятностью единица при любом t. Каждая частица T_0 остается без изменения. Обозначим через q_k^n вероятность того, что процесс, начавшийся с одной частицы типа T_k, рано или поздно кончится, произведя «n» финальных частиц T_0.

Пусть $s = 1$. Обозначим через μ_n число частиц типа T_0, которое n частиц T_1 производит при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Если производящая функция $f_1(x_0, x_1)$ аналитична при $|x_0| < R$, $|x_1| < R$, $R > 1$, $a = \dfrac{\partial f_1(1,1)}{\partial x_1} = 0$, $b = \dfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x_1^2} > 0$ и $a_{10} = \dfrac{\partial f_1(1,1)}{\partial x_0} > 0$, то при $x > 0$ и $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_n}{\frac{2a_{10}}{b} n^2} < x\right\} \to \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{4t}}\, x^{-3/2}\, dt.$$

Теорема 2. *Если $f_1(x_0, x_1)$ аналитична при $|x_0| < R$, $|x_1| < R$, $R > 1$, $b > 0$, то при $n \to \infty$, $a < 0$, $a \to \infty$ так, что $k = na$ постоянно, $\eta_n = \dfrac{\mu_n}{\frac{2a_{10}}{b} n^2}$ в пределе имеет бесгранично делимый закон распределения с характеристической функцией, логарифм которой равен*

$$\ln \varphi(\tau) = \int_0^{\infty} \left(e^{iu\tau} - 1 - \frac{iu\tau}{1+u^2}\right) dN(u),$$

$$N(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, x^{-1/2} e^{-\frac{k^2}{b^2} x^2}.$$

Пусть $s > 1$. Предполагаем, что $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ аналитичны при $|x_i| < R$, $R > 1$ $i = 1, 2, \ldots, s$. Обозначим $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(1, 1, \ldots, 1)}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, S$. Пусть все характеристические корни матрицы $A = \|a_{i,j}\|$ имеют неположительные действительные части. Тогда имеет место

Теорема 3. *Пусть μ_n — число частиц финального типа T_0, которое получается в конце процесса, начинающегося с «n» частиц типа T_i. Если существует собственный предельный при $n \to \infty$ закон распределения для $\dfrac{\mu_n}{n^{2^r}}$, то этот закон устойчивый с $\alpha = \dfrac{1}{2^r}$, $1 \leqslant r \leqslant S$.*

Далее приводятся схемы ветвящегося процесса, приводящие к устойчивому закону с $\alpha = \frac{1}{2^r}$.

Башарин Г. П., Об использовании критерия согласия χ^2 в качестве критерия независимости испытаний (Basharin G. P., On using test of goodness of fit as a test of independence of trials).

1. Рассмотрим систему с конечным числом состояний $A_i\,(i=\overline{1,s})$. Обозначим частоту состояния A_i в последовательности из N испытаний через m_i, а частоту перехода из состояния A_i к состоянию A_j, т. е. число серий A_iA_j, через $m_{ij}\,(i,j=\overline{1,s})$.

При статистическом анализе случайных чисел представляет интерес проверка простой гипотезы H_0', согласно которой испытания независимы, а все состояния равновероятны. Для этой цели Кендал и Смит [4] предложили использовать четыре критерия случайности, в том числе критерий, основанный на статистике

$$\frac{s^2}{N}\sum_{i,\,j=1}^{s}\left(m_{ij}-\frac{N}{s^2}\right)^2. \tag{1}$$

В статье [4] ошибочно предполагалось, что выборочное распределение статистики (1) при $N\to\infty$ сходится к распределению $\chi^2_{s^2-s}$, где через χ^2_m обозначена случайная величина, имеющая распределение χ^2 с m степенями свободы. В журнальной литературе на эту ошибку впервые указал Гуд [2], рассмотревший критерий случайности для серий произвольной длины, но только для простого числа состояний s. Более общие результаты можно получить при помощи матричных методов. Ниже приводятся некоторые из них.

2. Рассмотрим сначала гипотезу H_0, согласно которой испытания независимы, а вероятности состояний равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Предельная матрица вторых моментов нормированных величин $\frac{m_{ij}-Np_ip_j}{\sqrt{N}p_ip_j}\,(i,j=\overline{1,s})$ имеет вид:

$$M=\|\delta_{ij}^{uv}+\sqrt{p_ip_v}\delta_j^u+\sqrt{p_up_j}\delta_v^i-3\sqrt{p_ip_jp_up_v}\,\|,\quad i,j,u,v=\overline{1,s}, \tag{2}$$

где $\delta_{ij}^{uv}=\delta_i^u\delta_j^v$, $\delta_i^u=\begin{cases}1 & i=u\\ 0 & i\neq u.\end{cases}$

Можно показать, что s характеристических чисел этой матрицы равны 0, $(s-1)^2$ — равны 1 и $s-1$ равны 2. Отсюда следует, что $N\to\infty$ — выборочное распределение статистики

$$\sum_{i,\,j=1}^{s}\frac{(m_{ij}-Np_ip_j)^2}{Np_ip_j} \tag{3}$$

сходится к распределению суммы независимых случайных величин $\chi^2_{(s-1)^2}+2\chi^2_{s-1}$.

3. Для того, чтобы получить статистику, имеющую предельное распределение χ^2, можно воспользоваться методом обращения усеченной предельной матрицы вторых моментов. Для упрощения выкладок ограничимся рассмотрением только гипотезы H_0'. Выбрасывая из матрицы (2) последние s строк и s столбцов, получим следующую матрицу:

$$\widetilde{M}=\left\|\delta_{ij}^{uv}+\frac{1}{s}(\delta_j^u+\delta_v^i)-\frac{3}{s^2}\right\|\begin{matrix}i,u=\overline{1,s-1}\\ j,v=\overline{1,s}.\end{matrix} \tag{4}$$

Можно показать, что $\operatorname{Det}\widetilde{M}=\frac{1}{s^s}$. Обратная матрица имеет вид

$$\widetilde{M}^{-1}\left\|\delta_{ij}^{uv}+\frac{s-1}{s}\delta_i^u+\delta_j^v+\delta_v^s+\delta_j^u+\frac{s-1}{s}\right\|. \tag{5}$$

Чтобы проверить этот результат, достаточно перемножить матрицы (4) и (5). Квадратичная форма случайных переменных $\sqrt{\frac{s^2}{N}}\left(m_{ij}=\frac{N}{s^2}\right)(i=\overline{1,s-1};\ j=\overline{1,s})$ с матрицей (5) после упрощений приводится к виду:

$$\frac{s^2}{N}\sum_{i,j=1}^{s}\left(m_{ij}-\frac{N}{s^2}\right)-\frac{s}{N}\sum_{i=1}^{s}\left(m_i-\frac{N}{s}\right)^2 \tag{6}$$

и имеет предельное распределение χ^2 с s^2-s степенями свободы.

При помощи метода отношения правдоподобия можно показать, что критерий, основанный на статистике (6), является в некотором смысле наилучшим критерием гипотезы H_0' по отношению к сложной гипотезе, согласно которой испытания связаны в простую однородную цепь Маркова. Полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда с любой простой гипотезой H_0 конкурирует сложная гипотеза, согласно которой испытания связаны в однородную цепь Маркова порядка $\nu-1$ (см. [1], [3]).

В последнем случае возникает необходимость в использовании статистик, зависящих только от частот некоторых из s^ν серий, причем выбор серий может быть обусловлен характером конкурирующей гипотезы. В качестве примера приведем статистику, являющуюся функцией частот s серий длины ν, состоящих из одинаковых состояний, и имеющую предельное распределение χ^2_s, если верна гипотеза H_0':

$$\frac{1}{c_\nu}\frac{s^\nu}{N}\left\{\sum_{i=1}^{s}\left(m_{i\ldots i}-\frac{N}{s^\nu}\right)^2+d_\nu\left(\sum_{i=1}^{s}m_{i\ldots i}-\frac{N}{s^{\nu-1}}\right)\right\}^2, \tag{7}$$

$$C_\nu=\frac{s^\nu+s^{\nu-1}-2}{(s-1)\,s^{\nu-1}},\quad d_\nu=\frac{2\nu-1}{s\,(s^\nu+s^{\nu-1}-2)/s-1-(2\nu-1)\,s},\quad \nu\geqslant 2.$$

В случае $\nu=2$ можно построить аналогичную статистику для проверки гипотезы H_0, имеющую при $N\to\infty$ предельное распределение χ^2_s:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s}\frac{(m_{ii}-Np_i^2)^2}{p_i^2(1+2p_i)}+\frac{3}{\left(1-3\sum\limits_{i=1}^{s}\dfrac{p_i^2}{1+2p_i}\right)N}\left[\sum_{i=1}^{s}\frac{m_{ii}-Np_2^i}{1+2p_i}\right]^2. \tag{8}$$

Для некоторых сложных конкурирующих гипотез может быть полезен критерий гипотезы H_0', основанный на статистике, зависящей только от частот m_{ju} или m_{uj} $(j=\overline{1,s})$. Статистика

$$\frac{s^2}{N}\left\{\sum_{j=1}^{s}r_{ju}^2+\frac{4}{(s-1)^2}r_u^2-\frac{2(s+1)\,r_{uu}r_u}{(s-1)^2}+\frac{s}{(s-1)^2}\right\}, \tag{9}$$

где $r_{ju}=\left(m_{ju}-\frac{N}{s^2}\right)$; $r_u=\left(m_u-\frac{N}{s}\right)$, имеет при $N\to\infty$ предельное распределение χ^2_s. Это же предельное распределение статистика (9) имеет и в том случае, когда r_{ju} заменено на r_{uj}.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. S. Bartlett, Proc. of the Cambr. Philos. Soc., 47 (1951), 86—95.
[2] I. J. Good, Proc. of the Cambr. Philos. Soc., 49, 2, 276—284.
[3] P. Hoel, Biometrika, 41 (1954), 430—433.
[4] M. Kendall, B. Smith, J. of Roy. Stat. Soc. Suppl., 6 (1939), 51.

Заседание 27 ноября

Степанов В. Е., Некоторые статистические критерии для цепей Маркова (Stepanow V. E., Some statistical tests for Markov chains).

Рассмотрим последовательность испытаний, связанных в простую однородную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей $P = \| p_{ij} \|$. В каждом испытании возможен один из «m» исходов, которые мы будем обозначать числами $1, 2, \ldots, m$. Пусть

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots \tag{1}$$

исходы этих испытаний. Образуем новую последовательность

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s); (a_2, a_3, \ldots . a_{s+1}); (a_3, a_4, \ldots, a_{s+2}) \ldots, \tag{2}$$

состоящую из s-численных комбинаций исходов первоначальной цепи (1). Последовательность (2) также образует простую однородную цепь Маркова, так называемую цепь Маркова — Брунса. Число возможных состояний этой цепи определяется структурой матрицы P. Будем обозначать его k'_s. Пусть, далее, $\nu^{(n)}_{i_1, i_2 \ldots i_s}$ означает частоту комбинаций $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ в отрезке длины «n» последовательности (2) и

$$\xi^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_s} \frac{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_s} - n p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{s-1} i_s}}{\sqrt{n p_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \ldots p_{i_{s-1} i_s}}}.$$

В том случае, когда исходная цепь положительно-регулярна, цепь Маркова — Брунса также обладает этим свойством. Известно, что в этом случае величины $\xi^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ распределены асимптотически нормально со средним значением, равным нулю и матрицей вторых моментов M_s.

Матрица M_s естественным образом порождает линейное преобразование в векторном пространстве X_s соответствующего числа измерений. Пусть λ — собственное значение этого преобразования и $X_{s,\lambda}$ — отвечающее ему инвариантное подпространство в X_s. λ является характеристическим корнем матрицы M_s и кратность $k_{s,\lambda}$ этого корня равна размерности $X_{s,\lambda}$. Доказывается следующая основная теорема.

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$ различные характеристические числа матрицы M_1 и $k_{1,\lambda_1}, k_{1,\lambda_2}, \ldots k_{1,\lambda n}, k_{1,0}$ их кратности. Тогда характеристические числа матрицы M_s суть

$$\lambda_1 + s - 1, \lambda_2 + s - 1, \ldots, \lambda_n + s - 1; s - 1; s - 2; \ldots, 2, 1, 0.$$

Кратности этих чисел могут быть найдены последовательно из следующих соотношений $k_{s+1,\lambda} = k_{s,\lambda-1}$, когда $\lambda \geqslant 2$

$$k_{s+1,0} = k'_s$$

$$\sum_{\lambda} k_{s+1,\lambda} = k'_{s+1}$$

отсюда при $s \geqslant 3$ $k_{s,1} = \Delta^2 k'_s = k'_s - 2k'_{s-1} + k'_{s+2}$ и при $s \geqslant 2$ $\operatorname{rang} M_s = \Delta k'_s = k'_s - k'_{s-1}$. Существует линейное отображение Π^{s+1}_s: $X_{s+1} \to X_s$ такое, что, будучи рассмотрено только на $X_{s+1,\lambda}$, оно является

нуль-отображением, если $\lambda = 1$,

невырожденным отображением на X_s, если $\lambda = 0$,

ортогональным отображением на $X_{s,\lambda-1}$, уменьшающим длины всех векторов в $\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - 1}}$ раз, если $\lambda \geqslant 2$.

Далее рассматриваются квадратичные формы

$$\psi^2_{s,n} = \sum_{i_1, i_2, i_s} \xi^{(n)2}_{i_1, i_2, \ldots i_s}.$$

Из основной теоремы без труда получаются:

Теорема 1. *Вторые разности* $\Delta^2\psi^2_{s,n} = \psi^2_{s,n} - 2\psi^2_{s-1,n} + \psi^2_{s-2,n}$ *при* $s \geqslant 3$ *асимптотически независимы и распределены по закону* χ^2 *с* $\Delta^2 k'_s - k'_s - 2k_{s-1} + k'_{s-2}$ *степенями свободы.*

Следствие: Квадратичные формы $\Delta\psi^2_{s,n} - \Delta\psi^2_{t,n}$ $(t \geqslant 2)$ асимптотически распределены как χ^2 с $\Delta k'_s - \Delta k'_t$ степенями свободы.

Теорема 2. *Квадратичные формы* $\Delta\psi^2_{s,n}$ $(s \geqslant 2)$ *асимптотически распределены по закону* χ^2 *с* $\Delta k'_s = k'_s - k'_{s-1}$ *степенями свободы.* Выясняется вероятностный смысл квадратичной формы $-\frac{1}{2}\Delta\psi^2_{s,n}$: с точностью до постоянного слагаемого это есть логарифм плотности предельного распределения величин $\xi^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$.

Эти результаты применяются к решению следующих двух задач: 1) Проверка гипотезы $H(P_r)$ о том, что дискретная цепь Маркова является r-сложной и управляется системой переходных вероятностей P_r, внутри более широкой гипотезы H_s о том, что цепь является s-сложной $(s \geqslant r)$.

2) Проверка гипотезы H_r о том, что цепь Маркова является r-сложной внутри более широкой гипотезы H_s $(s \geqslant r)$. Подобные же задачи рассматривались в работах Bartlett [1], Hoel [2], Good [3], Смирнова [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. S. Bartlett, Proc. Camb. Phil. Soc., **47** (1951), 86—95.
[2] F. G. Hoel, Biometrika, **41** (1954), 430—433.
[3] I. J. Good, Biometrika, **42** (1955), 531—533.
[4] Н. В. Смирнов, О статистической оценке переходных вероятностей в цепях Маркова, Вестник Ленинградского ун-та, № 11 (1955), 47—48.

Заседание 4 декабря.

Линник Ю. В., К вопросу о нахождении генерального распределения по распределению статистик (Linnik Yu. V., Determining the probability distribution by a statistic's distribution).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», том I, вып. 4.

Заседание 18 декабря.

Волков С. Д., Задача о распределении микроскопических напряжений и деформаций (Volkov S. D., The problem of distributing microscopic voltages and deformations).

Содержание доклада публикуется в Известиях АН СССР, отд. технических наук.

Дынкин Е. Б., Неоднородные строго марковские процессы (Dynkin E. B. Nonhomogeneous strong Markov processes).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Доклады АН СССР», т. 113, № 2.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей или Киев, площадь Калинина 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the letter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to adress their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 21/VI-1957 г. Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$ Бум. л. $4^1/_2$
Печ. л. 12,33+1вкл. Уч.-изд. 12,3. Тираж 2025. Зак. 1415. Т-05077

2-я тип. Издательства АН СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена ~~11 р. 25 к.~~ 2-25

1-13

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КОНКУРСЫ НА СОИСКАНИЕ ИМЕННЫХ ПРЕМИЙ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Отделение физико-математических наук Академии наук СССР сообщает, что в 1957 году будут проведены следующие конкурсы на соискание премий:

1. Имени М. В. Ломоносова в размере 20.000 рублей, за особо выдающиеся научные исследования и открытия в области физики.

2. Имени П. Л. Чебышева в размере 20.000 рублей, за лучшие работы в области математики.

Премии присуждаются Президиумом Академии наук СССР по конкурсу советским гражданам, их авторским коллективам и советским научным учреждениям.

Работы на соискание именных премий могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими учреждениями, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными гражданами.

На конкурс представляются только работы, опубликованные в печати.

Работы на премию им. М. В. Ломоносова представляются в Отделение физико-математических наук Академии наук СССР (Москва В-71, Б. Калужская, 14) на русском языке в 2 экз. с надписью «На соискание премии имени М. В. Ломоносова».

Работы на премию им. П. Л. Чебышева представляются в Математический институт им. В. А. Стеклова (Москва В-134, 1-й Академический пр. д. 8) на русском языке в 2 экземплярах с надписью «На соискание премии имени П. Л. Чебышева».

При работах должны быть приложены: автореферат на каждую работу (не более 0,25 авт. листа), краткие биографические данные об авторах и перечень их научных работ и изобретений.

Срок представления работ на соискание именных премий до 1 сентября 1957 года

Отделение физико-математических наук
Академии наук СССР